Serie 6

Vektorräume, Untervektorräume, Span, Linearkombinationen

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 1(c), 3(a), 5(d) und 6(b) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen.

1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. In dieser Aufgabe sollen Sie unter anderem Teile von Lemma 2.2 beweisen.
   (a) Beweisen Sie, dass der Nullvektor, also das Element $0_V \in V$ aus (V2) mit der Eigenschaft
   $$0_V + v = v \quad \forall v \in V$$
   eindeutig ist.
   (b) Sei $v \in V$. Beweisen Sie, dass das additiv Inverse in (V3), also das Element $w \in V$ mit der Eigenschaft
   $$v + w = 0_V$$
   eindeutig ist.
   (c) Beweisen Sie, dass $-(-v) = v$ für alle $v \in V$ gilt. (2)
   (d) Sei $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und seien $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass es dann ein eindeutiges $x \in V$ mit $v+3x = w$ gibt.
   (e) Die leere Menge ist kein Vektorraum. Sie erfüllt nur genau eines der Vektorraumaxiome (V1)-(V8) in Definition 2.1 aus dem Skript nicht. Welches?
   (f) Zeigen Sie, dass man (V3) in Definition 2.1 ersetzen könnte durch
   $$(V3') \qquad \forall v \in V : 0_K \cdot v = 0_V.$$

2. Sei X eine Menge. In dieser Aufgabe möchten wir eine Vektorraum-Struktur auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$ definieren. Nehmen Sie sich ein bisschen Zeit, selbst zu überlegen, was die Addition und der Nullvektor sein könnten. Aus den Vektorraumaxiomen und Lemma 2.2 wird Ihnen dann vielleicht auch klar, wie die Skalarmultiplikation definiert sein muss.
   Wir helfen Ihnen bei der Addition: Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ist deren *symmetrische Differenz* definiert als
   $$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{P}(X).$$
   (a) Zeigen Sie $A\Delta B = B\Delta A$ und $(A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta\,(B\Delta C)$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ zusammen mit der symmetrischen Differenz als Addition und $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ als neutralem Element eine abelsche Gruppe ist.
   (c) Folgern Sie aus den Vektorraumaxiomen und Lemma 2.2, dass die Skalarmultiplikation durch
   $$\cdot : \mathbb{F}_2 \times V \to V, \qquad \begin{aligned} \overline{0} \cdot A &= \emptyset, \\ \overline{1} \cdot A &= A \end{aligned}$$
   definiert sein muss. Zeigen Sie, dass mit dieser Skalamultiplikation $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ ist.

3. Seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $W \subseteq V$. Dann sind äquivalent: (2)

   i. W ist ein Untervektorraum von V.

   ii. $W \neq \emptyset$ und für alle $u, v \in W, a \in K$ gilt $u - a \cdot v \in W$.

(b) Seien $W, W' \subseteq V$ Unterräume. Dann ist $W \cup W'$ ein Untervektorraum genau dann, wenn $W \subseteq W'$ oder $W' \subseteq W$.

4. Finden Sie alle Untervektorräume von $\mathbb{F}_2^2$, wobei $\mathbb{F}_2^2$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation versehen ist. Begründen Sie, warum es keine weiteren als die von Ihnen gefundenen Untervektrorräume geben kann.

5. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Was passiert, wenn in (c) und (d) der Körper $\mathbb{R}$ durch den endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ ersetzt wird?

   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$

   (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

   (c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

   (d) $\{(\mu + a, a^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ (2)

6. Sei K ein Körper und sei $\mathrm{Abb}(K, K) = K^K$ der Vektorraum über K aller Abbildungen $f\colon K \to K$. Seien

$$V_1 := \{f \in \mathrm{Abb}(K,K) \mid \forall x \in K : f(-x) = f(x)\} \qquad \text{(gerade Funktionen)},$$
$$V_2 := \{f \in \mathrm{Abb}(K,K) \mid \forall x \in K : f(-x) = -f(x)\} \qquad \text{(ungerade Funktionen)}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $V_1, V_2 \subseteq \mathrm{Abb}(K, K)$ Untervektorräume sind.

   (b) Nehmen Sie an, dass $K = \mathbb{R}$ ist und zeigen Sie, dass für alle $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eindeutige f_1, f_2 mit $f_i \in V_i, i \in \{1, 2\}$ existieren, sodass $f = f_1 + f_2$ gilt. (2)

   (c) Sei nun K ein Körper mit Charakteristik $\mathrm{char}(K) = 2$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{Abb}(K, K) = V_1 = V_2$ gilt.

7. Sei $\mathbb{R}^\infty = \{(x_i)_{i \geq 1} \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \geq 1\}$ der Vektorraum über $\mathbb{R}$ der reellwertigen Folgen. Sei P_1 die Menge aller schliesslich polynomialen Folgen, das heisst, sei

$$P_1 := \{(x_i)_{i \geq 1} \in V \mid \exists N \geq 1,\ \exists \text{ Polynom } P(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ sodass } \forall i \geq N\colon x_i = P(i)\},$$

und sei P_2 die Menge aller periodischen Folgen, das heisst, sei

$$P_2 := \{(x_i)_{i \geq 1} \in V \mid \exists m \geq 1 \text{ sodass } \forall i \geq 1\colon x_{i+m} = x_i\}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass P_1 und P_2 Untervektorräume von V sind.

8. Wir betrachten den Matrizenraum $V = M_{n \times n}(K)$ für einen Körper K. In der Übungsstunde haben Sie gesehen, dass dies ein Vektorraum über K ist. Wir definieren

$$U_1 = \{A = (a_{ij}) \in V \mid A^T = A\},$$
$$U_2 = \{A = (a_{ij}) \in V \mid A^T = -A\},$$

wobei $A^T = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ die *transponierte Matrix* von A bezeichnet. U_1 ist die Teilmenge von V der *symmetrischen* Matrizen, U_2 die Teilmenge der *schiefsymmetrischen* Matrizen.

   (a) Zeigen Sie, dass U_1 ein Untervektorraum von V ist. U_2 ist ebenfalls ein Untervektorraum, dies müssen Sie hier aber nicht zeigen.

   (b) Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie, dass $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{Sp}(U_1 \cup U_2) = V$ ist. *Tipp:* Um $V \subseteq \mathrm{Sp}(U_1 \cup U_2)$ zu zeigen, betrachten Sie für $M \in V$ die Matrix $\frac{1}{2}(M + M^T)$.

9. (a) Schreiben Sie den Vektor $(-1, 0, 3, 2) \in \mathbb{R}^4$ als Linearkombination der Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0, 1, 1), \\ v_2 &= (-4, -2, 0, 1), \\ v_3 &= (4, 3, 0, 0), \\ v_4 &= (3, 2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

(b) Gegeben seien die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 + x^2, \\ p_2(x) &= x^3 - 2x - 4, \\ p_3(x) &= 3x + 4, \\ p_4(x) &= 2x + 3 \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}[x]$. Schreiben Sie das Polynom $2x^3 + 3x^2 - 1 \in \mathbb{R}[x]$ als Linearkombination der Polynome p_1, p_2, p_3, p_4.
Tipp: Verwenden Sie die Teilaufgabe (a).

(c) Schreiben Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

als Linearkombination der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Tipp: Verwenden Sie die Teilaufgabe (a).

10. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.