D-MATH
Dr. Menny Akka Ginosar
Paula Truöl

HS 2020
ETH Zürich

Serie 7

Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Hinweise: Wir haben die Aufgaben dieser Serie bewusst versucht kürzer zu halten, um Ihnen im Rahmen der „entschleunigten Woche“ die Möglichkeit zu geben, auch schwierige Themen der vergangenen Wochen zu wiederholen. Demensprechend können Sie dieses Mal auch nur in zwei Aufgaben, nämlich in den Aufgaben 3 und 4 Punkte bekommen. Wie immer erwarten wir dennoch, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen. Insbesondere sind uns die Aufgaben 7 und 8 wichtig.

1. Überprüfen Sie jeweils, ob die gegbenen Vektoren über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

   (a)
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

   (b)
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\t^2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

   Tipp: Hier ist eine Fallunterscheidung nötig.

2. Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und sei V ein Vektorraum über K. Seien $u, v \in V$ mit $u \neq v$. Zeigen Sie, dass $\{u, v\}$ linear unabhängig ist genau dann, wenn $\{u+v, u-v\}$ linear unabhängig ist.

3. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Nur für die Entscheidung wahr/falsch bekommen sie keine Punkte, begründen Sie Ihre Entscheidung!

   (a) Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig und sei $0 \neq \lambda \in K$. Dann sind $\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_n$ linear unabhängig. (2)

   (b) Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ und $w_1, \dots, w_n \in V$ jeweils linear unabhängig. Dann sind $v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n$ linear unabhängig. (2)

4. Finden Sie für die Körper $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_2$ jeweils eine Basis $S' \subseteq S$ von $\mathrm{Sp}(S)$, wobei (4)
$$S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \subseteq K^5.$$

5. Sei $U = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \mid p(6) = 0\}$, wobei $\mathbb{R}[x]_4 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 4\}$. Finden Sie eine Basis von U. Erweitern Sie diese Basis dann zu einer Basis von $\mathbb{R}[x]_4$.

6. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der folgenden Vektorräume:

(a) Die Lösungsmenge in $\mathbb{R}^3$ von

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0, \end{array}$$

(b) $\{0_V\} \subseteq V$ für einen beliebigen Vektorraum V über einem Körper K,

(c) $\big\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\big\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$,

(d) $\big\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\big\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

7. In Aufgabe 2 von Serie 6 haben Sie gezeigt, dass $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot)$ für eine beliebige Menge X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2$ ist. Sei nun $X = \{1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ eine Basis von $\mathcal{P}(X)$ ist.
   (b) Sei $n = 3$. Zeigen Sie, dass alle zweielementigen Teilmengen von $X = \{1,2,3\}$ keine Basis von $\mathcal{P}(X)$ bilden. Zeigen Sie weiter, dass hingegen $\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ eine Basis von $\mathcal{P}(X)$ ist.

8. Wir betrachen nochmal die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2$. Sei hier $X = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$A_n := \{B \mid B \subseteq \{1, \dots, n\}\}\,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $A_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Untervektorraum ist für alle $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Benutzen Sie ein Lemma aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass

$$A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

   ein Untervektorraum von $\mathcal{P}(X)$ ist. Ist $A = \emptyset$? Falls nein, bestimmen Sie A.
   (c) Zeigen Sie zunächst die folgende Aussage: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $W_n \subseteq V, n \in \mathbb{N}$, Untervektorräume von V mit $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \ldots \subseteq V$. Dann ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$$

   ein Untervektorraum von V.
   Folgern Sie aus der obigen Aussage, dass

$$B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

   ein Untervektorraum von $\mathcal{P}(X)$ ist. Ist $B = \mathcal{P}(X)$? Falls nein, bestimmen Sie B.