Serie 8

Durchschnitt, Summen, direkte Summen, Dimensionsformel

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 1(a), 3, 5(a) und 7(a) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen, außer die mit einem $(*)$ deklarierte Aufgabe 7(d), die wir als besonders schwierig einschätzen.

1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig und $w \in V$.
   (a) Zeigen Sie, dass (2)
   $$\dim \mathrm{Sp}(v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1) = n - 1$$
   gilt.
   (b) Zeigen Sie, dass
   $$\dim \mathrm{Sp}(v_1 + w, \ldots, v_n + w) \geq n - 1$$
   gilt.
   Tipp: Benutzen Sie (a), um $n-1$ linear unabhängige Vektoren in $\mathrm{Sp}(v_1 + w, \ldots, v_n + w)$ zu finden.
   (c) Nehmen Sie nun an, dass zusätzlich $w \notin \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_n)$ gilt. Zeigen Sie, dass dann
   $$\dim \mathrm{Sp}(v_1 + w, \ldots, v_n + w) = n$$
   gilt.

2. Sei
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$
   (a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis für den Zeilenraum und den Spaltenraum von A.
   (b) Bestimmen Sie Zeilenrang(A) und Spaltenrang(A).

3. Gegeben seien die Untervektorräume (2)
   $$U := \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad V := \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
   von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Durchschnitts $U \cap V$.

4. Gegeben seien die Untervektorräume
   $$\begin{aligned} U &:= \left\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\right\}, \\ V &:= \{(\alpha, \ldots, \alpha) \in K^n \mid \alpha \in K\} \end{aligned}$$
   von K^n für einen Körper K, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Untervektorräume U, V, $U \cap V$ und $U + V$.
   Hinweis: Beachten Sie, dass je nach Charakteristik des Körpers K dort $n \cdot 1 = 0$ oder $n \cdot 1 \neq 0$ gilt. Achten Sie darauf, diese Fälle zu unterscheiden, wenn Sie eine Basis bzw. die Dimension von $U \cap V$ und $U + V$ bestimmen.

5. Prüfen Sie jeweils, ob die folgenden Summen von Vektorräumen über $\mathbb{R}$ direkt sind oder nicht, also ob $U+V=U\oplus V$ mit U,V den jeweils angegebenen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^4$ gilt.
   (a) $\operatorname{Sp}\big((1,0,0,1),(2,3,-3,9)\big)+\operatorname{Sp}\big((1,3,-4,7),(2,0,1,3)\big)$, (2)
   (b) $\operatorname{Sp}\big((1,2,3,4),((-3,4,2,8)\big)+\operatorname{Sp}\big((-3,9,1,3)\big)$,
   (c) $\operatorname{Sp}\big((1,2,3,4),(-3,-6,-9,-12)\big)+\operatorname{Sp}\big((-3,4,2,8),(-3,9,1,3)\big)$.

6. Seien V und W Vektorräume über einem Körper K.
   (a) Zeigen Sie, dass $V\times W$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum, genannt der *Produktraum* von V und W, ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $V\times\{0\}$ und $\{0\}\times W$ Untervektorräume von $V\times W$ sind.
   (c) Zeigen Sie, dass
   $$V\times W=\big(V\times\{0\}\big)\oplus\big(\{0\}\times W\big)$$
   gilt.

   Man nennt $V\times W$ auch die *äußere direkte Summe* von V und W, um sie von der *„inneren“ direkten Summe* von Untervektorräumen zu unterscheiden, die sich innerhalb eines festen Vektorraums abspielt. Die äußere Summe von Untervektorräumen kann immer gebildet werden, die innere Summe $V+W$ von Untervektorräumen V,W eines Vektorraums U ist hingegen oft nicht direkt, denn es gilt nicht unbedingt $V\cap W=\{0\}$.
   Noch eine Bemerkung zur Dimension: Es gilt $\dim(V\times W)=\dim V+\dim W$. Falls $V+W$ eine „innere“ direkte Summe $V\oplus W$ ist, so stimmt die Dimension von $V\times W$ mit $\dim(V\oplus W)$ überein.

7. (a) Seien die zwei Untervektorräume (2)
   $$U=\operatorname{Sp}\left(\left\{x^2+x^3+x^4+x^5,x+x^5+x^7,x^7+x^8,x^2+x^6,x^4+x^7\right\}\right),$$
   $$V=\operatorname{Sp}\left(\left\{1,x,x^2,x^3,x^4\right\}\right)$$
   von $\mathbb{Q}[x]_8=\{p\in\mathbb{Q}[x]\mid\deg(p)\leq 8\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $U\cap V\neq\{0\}$ ist.
   (b) Seien U,V Untervektorräume des $\mathbb{C}^6$ der Dimension 4. Zeigen Sie, dass es zwei Vektoren in $U\cap V$ gibt, so dass keiner der Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen ist.
   (c) Seien $X_1,X_2\subseteq\{1,2,\ldots,9\}$ zwei Teilmengen mit $|X_1|=4$, $|X_2|=7$ und $|X_1\cap X_2|=3$. Wir betrachten $U=\mathcal{P}(X_1)$, $V=\mathcal{P}(X_2)$ als Untervektorräume des Vektorraums $\mathcal{P}(\{1,\ldots,9\})$ über $\mathbb{F}_2$. Bestimmen Sie $\dim(U+V)$.
   (d) Seien die zwei Untervektorräume $(*)$
   $$U=\left\{A\in M_{2\times3}(\mathbb{F}_7)\mid A\cdot\begin{pmatrix}\overline{1}\\\overline{1}\\\overline{1}\end{pmatrix}=0\right\},$$
   $$V=\operatorname{Sp}\left(\left\{\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{0}&\overline{6}\\\overline{6}&\overline{0}&\overline{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{0}&\overline{6}\\\overline{1}&\overline{0}&\overline{6}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{1}&\overline{0}\\\overline{1}&\overline{1}&\overline{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{0}&\overline{1}&\overline{1}\\\overline{0}&\overline{1}&\overline{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{2}&\overline{3}\\\overline{4}&\overline{5}&\overline{6}\end{pmatrix}\right\}\right)$$
   von $M_{2\times3}(\mathbb{F}_7)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $U+V=M_{2\times3}(\mathbb{F}_7)$ ist.
   Tipp: Zeigen Sie zunächst $\dim U=4$, $\dim V=4$ und $\dim U\cap V=2$.

8. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.