D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2020
Dr. Menny Akka Ginosar | | ETH Zürich
Paula Truöl

Serie 9

Komplement, Rang, lineare Abbildungen, Kern und Bild

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 2(b), 5(b), 6(a) und 7(a) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen. Besonders Aufgabe 7 ist uns sehr wichtig, Aufgabe 8 könnten Sie aus Zeitgründen auch weglassen.

1. Betrachten Sie den Untervektorraum

$$U := \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^4$. Finden Sie eine Basis eines Komplements von U in $\mathbb{R}^4$, d.h. eines Untervektorraums V von $\mathbb{R}^4$ mit $U \oplus V = \mathbb{R}^4$ (vgl. Definition 2.113 aus dem Skript).

2. Erinnern Sie sich aus der Vorlesung, dass der *Rang* einer Matrix A auf zwei Arten definiert werden kann: einerseits als Anzahl der Pivots einer Matrix in Zeilenstufenform, welche aus A durch Zeilenoperationen entstanden ist; andererseits als Zeilenrang(A) bzw. Spaltenrang(A).

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(i) über $\mathbb{R}$,
(ii) über $\mathbb{F}_2$.

(b) Bestimmen Sie den Rang der reellen Matrix (2)

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -1\\1 & 0 & -2 & -2\\1 & 2 & 8 & a^2+3a\\-2 & -1 & a & 1\end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie den Rang der rationalen $n\times n$-Matrix

$$C = (k\ell\,)_{k,\ell=1,\ldots,n}$$

in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

3. Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antwort.
Betrachten Sie dabei die Vektorräume $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ in den Teilaufgaben (a)-(d) wie üblich als Vektorräume über $\mathbb{R}$. Fassen Sie in Teilaufgabe (e) $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ auf. (Dies ist also ebenfalls ein Koordinatenraum K^n über K für $K = \mathbb{C}$, $n = 1$ (vgl. Beispiel 2.3 im Skript).)

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y, 2x, 1)$

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$,

(d) $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$,

(e) $k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, z \mapsto \bar{z}$.

4. Seien die folgenden Abbildungen $T\colon K^n \to K^m$ für einen Körper K gegeben. Zeigen Sie, dass die Abbildungen linear sind, indem Sie eine Matrix A der richtigen Dimension finden, sodass $T(x) = Ax$ für alle $x \in K^n$ gilt.

   (a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, 2x_1, 0)$,

   (b) $T\colon \mathbb{F}_5^3 \to \mathbb{F}_5^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, x_1)$,

   (c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$,

5. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K.

   (a) Sei $T\colon V \to W$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass dann T genau dann linear ist, wenn

   $$T(v_1 - \lambda v_2) = T(v_1) - \lambda T(v_2)$$

   für alle $v_1, v_2 \in V$ und für alle $\lambda \in K$ gilt.

   (b) Sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $W' \subseteq W$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie dass dann (2)

   $$T^{-1}(W') := \{v \in V \mid T(v) \in W'\}$$

   ein Untervektorraum von V ist.

   (c) Sei $T\colon V \to W$ eine Abbildung und nehmen Sie an, dass für ein $w \in W \setminus \{0_W\}$ die Menge $T^{-1}(\{w\})$ ein Untervektorraum von V ist. Zeigen Sie, dass T nicht linear ist.

6. Untersuchen Sie die folgenden linearen Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität und bestimmen Sie jeweils Kern und Bild. Wenn Sie unsicher sind, überzeugen Sie sich zunächst, dass die Abbildungen auch wirklich linear sind. Alle Vektorräume in dieser Aufgabe sind als Vektorräume <u>über $\mathbb{R}$</u> aufzufassen.

   (a) $f_a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (3x + 2y, -x - 2y/3)$, (2)

   (b) $f_b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y$,

   (c) $f_c\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R},\ p \mapsto p(1)$,

   (d) $f_d\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ p \mapsto D(p) = p'$, wobei D wie in Beispiel 3.6 aus dem Skript die Differentiation bezeichnet.

   (e) $f_e\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$. Achtung: Wir betrachten hier $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

7. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K,

   (a) Seien $T \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ injektiv und $S \subseteq V$. Beweisen Sie (2)

   $$S \text{ ist linear unabhängig} \Leftrightarrow T(S) \text{ ist linear unabhängig.}$$

   (b) Seien $T \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass T genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ eine Basis von W ist.

   (c) Seien $T \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$, $v \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ mit

   $$T^n(v) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad T^{n+1}(v) = 0.$$

   Beweisen Sie, dass dann $v, T(v), \ldots, T^n(v)$ linear unabhängig sind.
   Tipp: Nehmen Sie an, dass es $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt mit

   $$\lambda_0 v + \lambda_1 T(v) + \ldots + \lambda_n T^n(v) = 0$$

   und zeigen Sie zuerst, dass dann $\lambda_0 = 0$ sein muss. Wenn Sie weitere Tipps brauchen, fragen Sie gerne nach, am besten im Forum!

8. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Ein Endomorphismus $P\colon V \to V$ heißt *idempotent* oder eine *Projektion*, falls $P^2 := P \circ P = P$ gilt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Für jede Projektion P gilt
   $$V = \operatorname{Ker}(P) \oplus \operatorname{Im}(P).$$
   (b) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume mit $V = W_1 \oplus W_2$. Dann existiert eine eindeutige Projektion $P\colon V \to V$ mit
   $$\operatorname{Ker}(P) = W_1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(P) = W_2.$$
   Tipp: Wählen Sie Basen für W_1 und W_2 und zeigen Sie, dass deren Vereinigung eine Basis für V ist. Benutzen Sie dann Satz 3.15, um eine geeignete Projektion P zu definieren.

9. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.