MC-Fragen Serie 10: Aufgaben

Einsendeschluss: Dienstag, der 1.12.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von $\mathbb{R}^2$ und bezeichne $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{E}_2$, dann ist f eine Drehung um den Ursprung $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2$ und $\mathcal{C} = (e_2, -e_1)$, dann ist f eine Punktspiegelung im Ursprung $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2$ und $f = I_{\mathbb{R}^2}$, dann ist $\mathcal{C} = (-e_2, e_1)$.

(d) Falls $\mathcal{C} = \mathcal{E}_2$ und f die Spiegelung an der y-Achse ist, dann ist $\mathcal{B} = (e_2, e_1)$.

2. Sei $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}_4[x])$ gegeben durch

$$T(p(x)) := (x+1)p'(x) \quad \text{für } p(x) \in P_4(\mathbb{R}).$$

Gegeben seien die folgenden geordneten Basen von $\mathbb{R}_4[x]$:

$$\mathcal{B} = \left(1, x, x^2, x^3, x^4\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left(1, x+1, x^2, x^3, (x+1)^4\right)$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -12 & -24 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

(f) $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(g) $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -16 & -24 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

(h) $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3. Für welche $n \in \mathbb{N}$ existiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Im}(\varphi)$?

(a) nie

(b) genau dann, wenn n gerade ist

(c) genau dann, wenn n eine Primzahl ist

(d) für alle $n \in \mathbb{N}$

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R}).$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$

(b) $\dim \operatorname{Ker}(A) = 1$

(c) $\dim \operatorname{Im}(A) = 2$

(d) $\operatorname{rang}(A) = 2$

(e) $\operatorname{rang}(A) = 3$

5. Für Matrizen A, B mit Einträgen in einem Körper K gilt:
$AB = I_n$ für ein $n \in \mathbb{N} \implies A$ und B sind invertierbar.

(a) richtig

(b) falsch

6. Die Menge der invertierbaren Matrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist ein Untervektorraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Wahr

(b) Falsch

7. Für eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ für einen Körper K gilt:
$A^2 = I_n \implies A = I_n$ oder $A = -I_n$.

(a) richtig

(b) falsch

8. (Zwischenprüfung Frühjahr 2015) Welcher der folgenden fünf Ausdrücke ist **nicht** identisch zu dem Ausdruck $(A+B)^2$ für beliebige quadratische Matrizen derselben Grösse A und B?

(a) $A^2 + 2AB + B^2$

(b) $(A+B)(B+A)$

(c) $(B+A)^2$

(d) $A(A+B) + B(A+B)$

(e) $A^2 + AB + BA + B^2$

9. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welcher der folgenden Aussagen sind wahr?

(a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 24 & 37 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 16 & 24 \end{pmatrix}.$$

(e)

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 13 & 24 \\ 18 & 37 \end{pmatrix}.$$