Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 12: Aufgaben

Einsendeschluss: Dienstag, der 15.12.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Wir betrachten $V = \mathbb{R}^4$ und $W = \mathbb{R}^3$ als Vektorräume über $\mathbb{R}$.

Sei $m_A : V \to W$ die durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ induzierte lineare Abbildung.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Für jeden Untervektorraum U von V gilt: $V/U \cong W$.

(b) Für jeden Untervektorraum U von V sodass $U \subseteq \operatorname{Ker}(m_A)$ gilt:

$$V/U \cong \operatorname{Sp}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

(c)

$$V/\operatorname{Sp}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right) \cong \operatorname{Im}(m_A).$$

(d) $\dim(V/\operatorname{Ker}(m_A)) = 2$.

2. Die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$$

ist

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 4.

(e) 8.

3. Sei $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 4$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $\det \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 8.$

(b) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = 4.$

(c) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c+2a & d+2b \end{pmatrix} = 4.$

(d) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 12.$

4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $\det\colon \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

(a) injektiv.

(b) surjektiv.

(c) linear.

(d) multilinear bezüglich Zeilen.

(e) alternierend.

5. Sei A eine reelle $2{\times}2$-Matrix, $m_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist

(a) $\dim \operatorname{Ker} m_A = 2 - \det(A)$

(b) $\dim \operatorname{Ker} m_A = 1 \Rightarrow \det(A) = 0$

(c) $\dim \operatorname{Ker} m_A = 1 \Rightarrow \det(A) = 1$

(d) $\dim \operatorname{Ker} m_A = 2 - \operatorname{Rang} L_A$

(e) $\dim \operatorname{Ker} m_A = 2 \Leftrightarrow A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 16 & 64 \\ 8 & 64 & 512 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Die Determinante der Matrix A ist

(a) durch 2 teilbar.

(b) durch 3 teilbar.

(c) durch 5 teilbar.

(d) durch 7 teilbar.

(e) durch 8 teilbar.

(f) durch 9 teilbar.