Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 6: Aufgaben

Einsendeschluss: Montag, der 02.11.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Sei $\mathbb{R}^\infty$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Zahlenfolgen versehen mit der Addition

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n = 0\}$ ist ein Untervektorraum.

(b) $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n = 1\}$ ist ein Untervektorraum.

(c) $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid a_n = 0 \text{ falls } 2 \mid n\}$ ist ein Untervektorraum.

(d) Keine der Aussagen ist wahr.

2. Es sei K ein Körper und

$$V = \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$$

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von V?

(a)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

(b)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid d = 0 \right\}$$

(c)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\}$$

(d)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V | a, b, d \in K \right\}$$

3. Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum über $\mathbb{R}$ aller reellen Polynome. Wir bezeichnen mit $p'(x)$ die Ableitung von $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}[x]$?

(a) $V := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(x)^2 = x\}$

(b) $V := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 1\}$

(c) $V := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p''(x) = p'(x)\}$

(d) $V := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(-2) \geq 0\}$

4. Betrachte $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit folgender Addition und skalarer Multiplikation:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 b_2)\\ c \cdot (a_1, a_2) &:= (ca_1, a_2)\end{aligned}$$

für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für alle $c \in \mathbb{R}$. Mit diesen Verknüpfungen ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Vektorraum.

(a) Wahr

(b) Falsch

5. Welche der folgenden Teilmengen $V \subset \mathbb{R}^4$ sind Untervektorräume?

(a) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 | \exists x \in \mathbb{R} : v = (0, x, 2x, 3x)\}$

(b) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 | \exists x \in \mathbb{R} : v = (x, x^2, x^3, x^4)\}$

(c) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 | \exists x, y \in \mathbb{R} : v = (x, x + y, y, x - y)\}$

(d) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 | \exists x, y \in \mathbb{R} : v = (x^2 - y^2, 0, 0, 0)\}$

(e) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 | \exists x, y \in \mathbb{R} : x > y \wedge v = (x, y, 0, 0)\}$

(f) Keine der Teilmengen ist ein Unterraum.

6. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume?

(a) $\mathbb{R}[X]$

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x + y = z + 3\}$

(c) $\mathbb{R}^2$

(d) $E = \{(1, 0)^T + t \cdot (1, -1)^T | t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(e) $E = \{(0, 0, 0)^T + t \cdot (0, 1, 0)^T | t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

7. Betrachte $V = \mathbb{F}_2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Untervektorräume hat V mit genau zwei Elementen?

(a) 0

(b) 1

(c) n

(d) $2^n - 1$

(e) 2^n

8. Seien $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ der Vektorraum aus der Vorlesung bzw. Aufgabe 2 von Serie 6, wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X ist und Δ die symmetrische Differenz ist. Welche der Aussagen sind wahr?

(a) $\mathrm{Sp}(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}) = \mathcal{P}(X)$

(b) Alle Teilmengen von X, die 2 nicht enthalten, bilden einen Untervektorraum von $\mathcal{P}(X)$.

(c) $\{S \subset X \| S| = 1\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Untervektorraum.

(d) $\mathrm{Sp}(\{1\}, \{2\}) = \mathrm{Sp}(\{1\}, \{1, 2\})$

(e) $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{P}(X)$.