MC-Fragen Serie 10: Aufgaben

Einsendeschluss: Dienstag, der 1.12.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von $\mathbb{R}^2$ und bezeichne $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{E}_2$, dann ist f eine Drehung um den Ursprung $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Tatsächlich stimmt die Abbildung auf der Standardbasis mit der Rotation um $\frac{\pi}{2}$ entgegen dem Uhrzeigersinn überein. Da Rotationen linear sind und lineare Abbildungen durch Ihre Wirkung auf einer Basis vollständig bestimmt sind, ist also f die Rotation um $\frac{\pi}{2}$ entgegen dem Uhrzeigersinn.

√ (b) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2$ und $\mathcal{C} = (e_2, -e_1)$, dann ist f eine Punktspiegelung im Ursprung $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Die Punktspiegelung q im Urspung sendet den Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf $(-x, -y)$. Insbesondere gilt $q : e_1 \mapsto -e_1$ und $q : e_2 \mapsto -e_2$. Sei $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$, d.h. $v_1 := e_2$ und $v_2 := -e_1$. Dann ist also $q(e_1) = -e_1 = 0v_1 + 1v_2$ und $f(e_2) = -e_2 = (-1)v_1 + 0v_2$ und somit ist $[q]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und da jede lineare Abbildung durch eine Darstellungsmatrix vollständig bestimmt ist, folgt $f = q$ wie behauptet.

√ (c) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2$ und $f = I_{\mathbb{R}^2}$, dann ist $\mathcal{C} = (-e_2, e_1)$.

Sei $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} e_1 &= f(e_1) = 0v_1 + 1v_2, \\ e_2 &= f(e_2) = (-1)v_1 + 0v_2 \end{aligned}$$

und folglich $v_2 = e_1$ und $v_1 = -e_2$ wie behauptet.

√ (d) Falls $\mathcal{C} = \mathcal{E}_2$ und f die Spiegelung an der y-Achse ist, dann ist $\mathcal{B} = (e_2, e_1)$.

Die Spiegelung f an der y-Achse sendet den Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf $(-x, y)$. Insbesondere ist $e_2 = f(e_2) = 0e_1 + 1e_2$ und $-e_1 = f(e_1) = (-1)e_1 + 0e_2$. Also gilt

$$[f]_{\mathcal{C}}^{(e_2, e_1)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Da f injektiv (bijektiv) ist, folgt $\mathcal{B} = (e_2, e_2)$.

2. Sei $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}_4[x])$ gegeben durch

$$T(p(x)) := (x+1)p'(x) \quad \text{für } p(x) \in P_4(\mathbb{R}).$$

Gegeben seien die folgenden geordneten Basen von $\mathbb{R}_4[x]$:

$$\mathcal{B} = \left(1, x, x^2, x^3, x^4\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left(1, x+1, x^2, x^3, (x+1)^4\right)$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

√ (d) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -12 & -24 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

(f) $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(g) $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -16 & -24 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

√ (h) $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Wir bezeichnen im Folgenden $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ und $\mathcal{C} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$. Die j-te Spalte von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ist der Koeffizientenvektor von $T(p_j)$ ausgedrückt in der Basis $\mathcal{B}$. Man berechnet:

$$T(p_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } j = 1 \\ (j-1)p_j + (j-1)p_{j-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also gilt

$$\forall 1 \leq i,j \leq 5 : ([T]_{\mathcal{B}})_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } j = 1 \\ 0 & \text{falls } j > 1, \text{ aber } i \notin \{j, j-1\} \\ j-1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um die Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ zu bestimmen, müssen wir leider ein wenig mehr schreiben. Man berechnet:

$$\begin{aligned} T(p_2) =& p_2 + p_1 = q_2 \\ T(p_3) =& 2(p_3 + p_2) = 2(q_3 + q_2 - q_1) \\ T(p_4) =& 3(p_4 + p_3) = 3(q_4 + q_3) \\ T(p_5) =& 4(p_5 + p_4) = 4(q_5 - 3q_4 - 6q_3 - 4q_2 + 3q_1) \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Spalten $([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{(j)}$, $1 \leq j \leq 5$ von $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, dass:

$$([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, ([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, ([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, ([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{(5)} = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ -24 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Für welche $n \in \mathbb{N}$ existiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Im}(\varphi)$?

(a) nie

√ (b) genau dann, wenn n gerade ist

(c) genau dann, wenn n eine Primzahl ist

(d) für alle $n \in \mathbb{N}$

Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Sei zunächst n gerade, also gilt $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Setze $\varphi(e_1) = e_{2k}, \varphi(e_2) = e_{2k-1}, \ldots, \varphi(e_k) = e_{k+1}$, $\varphi(e_l) = 0$ für $l > k$. Dann gilt $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Sp}(e_{k+1}, \ldots, e_{2k})$ und $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Sp}(e_{2k}, \ldots, e_{k+1})$. (Wieso?) Also gilt $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Im}(\varphi)$. Für gerade n stimmt die Aussage also.
Für ungerade n benutzen wir, dass $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) + \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = \dim \mathbb{R}^n = n$ gelten muss. Da n ungerade ist, folgt $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) \neq \dim(\operatorname{Ker}(\varphi))$. Insbesondere kann nicht $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Im}(\varphi)$ gelten.

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R}).$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) $\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$

(b) $\dim \operatorname{Ker}(A) = 1$

√ (c) $\dim \operatorname{Im}(A) = 2$

√ (d) $\operatorname{rang}(A) = 2$

(e) $\operatorname{rang}(A) = 3$

Es gilt (vgl. Aufgabe 1(a) auf Serie 10)

$$\dim \operatorname{Im}(A) = \dim \operatorname{SR}(A) = \text{Spaltenrang}(A) = \operatorname{rang}(A) = 2,$$

da A in Zeilenstufenform ist und zwei Pivots hat. A definiert eine Abbildung $m_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Nach der Dimensionsformel aus dem Rangsatz gilt also

$$\dim \operatorname{Ker}(A) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im}(A) = 4 - 2 = 2.$$

5. Für Matrizen A, B mit Einträgen in einem Körper K gilt:
$AB = I_n$ für ein $n \in \mathbb{N} \implies A$ und B sind invertierbar.

(a) richtig

√ (b) falsch

A könnte eine $m \times n$-Matrix sein und B eine $n \times m$-Matrix. Für solche Matrizen ist der Begriff "invertierbar" nicht definiert, aber es könnte $AB = I$ gelten. Betrachten Sie das Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $AB = I_2$, aber weder A noch B ist invertierbar.

6. Die Menge der invertierbaren Matrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist ein Untervektorraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Die Nullmatrix ist nicht invertierbar.

Beachten Sie zudem, dass die Menge der invertierbaren Matrizen nicht abgeschlossen ist bezüglich Addition. In der Tat ist $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) = I_2$, und also $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ invertierbar, aber

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist nicht invertierbar.

7. Für eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ für einen Körper K gilt:
$A^2 = I_n \implies A = I_n$ oder $A = -I_n$.

(a) richtig

√ (b) falsch

Betrachten Sie

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

8. (Zwischenprüfung Frühjahr 2015) Welcher der folgenden fünf Ausdrücke ist **nicht** identisch zu dem Ausdruck $(A+B)^2$ für beliebige quadratische Matrizen derselben Grösse A und B?

√ (a) $A^2 + 2AB + B^2$

(b) $(A+B)(B+A)$

(c) $(B+A)^2$

(d) $A(A+B) + B(A+B)$

(e) $A^2 + AB + BA + B^2$

Aus dem Kommutativgesetz der Matrixaddition und dem Distributivgesetz der Matrixaddition und -multiplikation folgt, dass alle Ausdrücke ausser (a) denselben Wert haben wie $(A+B)^2$. Der Ausdruck (a) ergibt nur dann denselben Wert, wenn $AB = BA$ ist.

9. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welcher der folgenden Aussagen sind wahr?

$\surd$ (a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\surd$ (c)

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 24 & 37 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 16 & 24 \end{pmatrix}.$$

(e)

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 13 & 24 \\ 18 & 37 \end{pmatrix}.$$

Dies folgt durch einfaches Nachrechnen. Die Matrix in (d) ist $A^2 + B^2$.