MC-Fragen Serie 10: Repetition

Einsendeschluss: Dienstag, der 01.12.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Zu welcher Abbildung ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasen?

√ (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (2x + y, x, 2y)$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (2x + y, x + 2z)$.

Seien $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{E}_3 = (e_1', e_2', e_3')$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Dann gilt für f wie in Aussage (a)

$$\begin{aligned} f(e_1) =& f(1,0) = (2,1,0) = 2e_1' + 1e_2' + 0e_3' \\ f(e_2) =& f(0,1) = (1,0,2) = 1e_1' + 0e_2' + 2e_3'. \end{aligned}$$

Also ist

$$[f]^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Analog kann man überprüfgen, dass für f wie in Aussage (b) stattdessen

$$[f]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2} = A^T$$

gilt.

2. Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K mit geordneten Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$ und sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann ist $[T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \in M_{n\times m}(K)$.

(a) richtig

√ (b) falsch

Seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$. Per Definition ist die j-te Spalte von $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ gegeben durch $[Tv_j]_{\mathcal{C}}$, und für jedes $w \in W$ ist $[w]_{\mathcal{C}} \in \mathbb{K}^m$. Also hat die Darstellungsmatrix von T bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ (und auch bezüglich allen anderen Paaren geordneter Basen von V und W) $n = |\mathcal{B}|$ Spalten und $m = |\mathcal{C}|$ Zeilen.

3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Sei V ein Vektorraum über K, $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Die Abbildung $V \to K^{\dim V}$, die jedem Vektor $v \in V$ den Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$ zuordnet, ist linear.

Dies gilt nach Proposition 3.36.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, und seien $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ sowie $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$. Dann ist $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$.

Das ist falsch. Betrachten Sie die Abbildung $f(x, y) = (x, 0)$. Dann ist $\mathrm{Ker}(f) = \{0\} \times \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \times \{0\}$ und folglich

$$\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \{(0, 0)\}$$

im Widerspruch zur Behauptung.

√ (c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Dann ist f bijektiv.

Nach Annahme ist $\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$, folglich gilt nach der Dimensionsformel aus dem Rangsatz

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(f).$$

Also ist $\mathrm{Im}(f)$ ein n-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ und folglich gilt

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n.$$

Also ist f surjektiv. Da per Annahme $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ ist, ist f gemäss Proposition 3.21 injektiv. Also ist f injektiv und surjektiv, somit bijektiv.

4. Die Menge der invertierbaren Matrizen in $M_{n \times n}(K)$ ist eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Siehe Proposition 3.55.

5. Gegeben seien Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $C = \left(\begin{smallmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ über $\mathbb{R}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist nicht definiert?

(a) CA^T

(b) B^TA

√ (c) C^TB

(d) B^TC^T

(e) AC^T

Wir erinnern uns: Falls $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{p\times q}(K)$ ist, dann ist das Produkt AB definiert genau dann, wenn $n = p$ ist. Außerdem gilt $A^T \in M_{n\times m}(K)$.

6. Gegeben seien Matrizen $A \in M_{2\times 3}(K), B \in M_{3\times 4}(K), C \in M_{4\times 4}(K)$ für einen Körper K. Welche der folgenden Produkte sind definiert?

√ (a) AB

(b) AC

√ (c) BC

√ (d) CB^T

(e) CB

7. Betrachten Sie die linearen Abbildungen $T, S_1, S_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ x \end{pmatrix}, \quad S_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}, \quad S_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Dann gilt

(a) $T = S_2 \circ S_1$

√ (b) $T = S_1 \circ S_2$

(c) keins von beiden

(d) beide

Wir berechnen

$$\begin{aligned} S_2 \circ S_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= S_2 \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ 2x \end{pmatrix} \\ S_1 \circ S_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= S_1 \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$