MC-Fragen Serie 11: Aufgaben

Einsendeschluss: Dienstag, der 08.12.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Welche der folgenden Matrizen sind Inverse von $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ über $\mathbb{Q}$?

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

√ (c) $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ die eindeutige Inverse von $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ ist.

2. (*Prüfung Winter 2017*) Die Transponierte einer Elementarmatrix ist wieder eine Elementarmatrix.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Transposition führt Zeilen- in Spaltenoperationen über, und somit Elementarmatrizen in Elementarmatrizen. Sei beispielsweise A eine Matrix und E die Matrix der Form "Addition des λ-fachen der i-ten zur j-ten Zeile", das heisst, EA entsteht aus A durch Addition der i-ten zur j-ten Zeile, dann entsteht $A^T E^T = (EA)^T$ aus A^T durch Addition der i-ten Spalte zur j-ten Spalte. Dies gilt für alle Matrizen A zulässiger Dimension und somit ist E^T eine Elementarmatrix. Die anderen Typen überprüft man analog.

3. (*Prüfung Winter 2017*) Die Elementarmatrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zusammen mit der Matrixmultiplikation bilden eine Gruppe.

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Das Produkt zweier Elementarmatrizen ist im Allgemeinen keine Elementarmatrix. Betrachte das Beispiel Addition der ersten zur zweiten Zeile gefolgt von Multiplikation der ersten Zeile mit 2. Angewandt auf I_2 liefert das die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, die keine Elemetarmatrix ist, da jede Elementarmatrix entweder Einträge alle 1 oder 0 hat (Typ II), eine Diagonalmatrix ist (Typ III), oder Diagonaleinträge gleich 1 hat (Typ I).

4. (*Prüfung Sommer 2017*) Eine Matrix ist genau dann nicht invertierbar wenn Zeilenrang $\neq$ Spaltenrang.

(a) Wahr.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Bei jeder Matrix stimmen Spalten- und Zeilenrang überein, was in der Vorlesung gezeigt wurde (Satz 3.75). Es gibt aber nicht-invertierbare Matrizen (beispielsweise $0 \in M_{1\times 1}(\mathbb{F}_2)$).

5. Sei $\mathcal{E}_2 := (e_1, e_2)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$ und sei $\mathcal{C} := \left(\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ eine weitere geordnete Basis von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Matrix $Q := [\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_2}$.

$\checkmark$ (a) $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) $Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(d) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(e) $Q = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Wir berechnen

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$
$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2.$$

Also gelten

$$[e_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [e_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

6. (*Prüfung Sommer 2017*) Sei $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und

$$\mathrm{Spur}\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; A = (a_{ij})_{ij} \mapsto \mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die Spur. Dann ist $\mathrm{Spur} \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Wir bezeichnen die Einträge einer Matrix A mit A_{ij}. Dann gilt nach Definition der Vektorraumstruktur auf $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Spur}(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^{n} (A + \lambda B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (A_{ii} + \lambda B_{ii}) = \mathrm{Spur}(A) + \lambda \mathrm{Spur}(B).$$

Folglich ist die Abbildung Spur linear und da $\mathrm{Spur}(A) \in \mathbb{R}$ liegt für alle $A \in V$, folgt $\mathrm{Spur} \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$.

7. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

(a) Jeder endlich dimensionale Vektorraum ist isomorph zu K^n für ein $n \geq 0$.

√ (b) Jede Darstellungsmatrix ist quadratisch.

(c) Die Darstellungsmatrix eines Isomorphismus ist invertierbar.

Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $V \to W$ hat die Grösse $\dim(W) \times \dim(V)$ und ist daher nur quadratisch, wenn $\dim(V) = \dim(W)$ ist.

8. Betrachte $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen reellen Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} := (1, i)$. Die Matrix $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Darstellungsmatrix bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ der folgenden linearen Abbildung $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(a) Die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$

(b) $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

(c) $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$

√ (d) $z \mapsto iz$

Ein Element $a + ib \in \mathbb{C}$ wird in der Basis $\mathcal{B}$ durch den Spaltenvektor $\binom{a}{b}$ dargestellt. Dieser wird durch die Matrix $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ auf den Vektor $\binom{-b}{a}$ abgebildet, welcher das Element $-b + ia = i(a + ib)$ darstellt.

9. Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen und sei $W \subseteq \mathbb{F}_3^2$ der Untervektorraum $W := \mathrm{Sp}((1,1)^T)$. Dann ist die Kardinalität von $\mathbb{F}_3^2/W$ gleich

(a) 1

(b) 2

√ (c) 3

(d) ∞

Aus der Dimensionsformel folgt, dass $\mathbb{F}_3^2/W$ ein eindimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_3$ ist und deshalb die Kardinalität 3 besitzt.

10. Welche Aussage gilt für alle Vektorräume V und W?

√ (a) Jede lineare Abbildung $\phi \colon V \to W$ induziert eine injektive lineare Abbildung $V/\mathrm{Ker}(\phi) \to W$.

(b) Jede lineare Abbildung $\phi \colon W \to V$ induziert eine surjektive lineare Abbildung $W \to V/\mathrm{Im}(\phi)$.

(c) Beide Aussagen sind richtig.

(d) Keine der Aussagen ist richtig.

Die Aussage (a) folgt aus der universellen Eigenschaft des Quotientenraumes. Die induzierte Abbildung in (b) ist immer die Nullabbildung, welche für eine nicht surjektive Abbildung ϕ nicht surjektiv ist.