Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 11: Repetition

Einsendeschluss: Dienstag, der 08.12.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit Basis $\mathcal{C}$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$:

√ (a) Die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_k\}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $\{[v_1]_\mathcal{C}, \ldots, [v_k]_\mathcal{C}\}$ linear unabhängig sind.

√ (b) Die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_k\}$ erzeugen V genau dann, wenn $\{[v_1]_\mathcal{C}, \ldots, [v_k]_\mathcal{C}\}$ K^k erzeugen.

√ (c) Die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_k\}$ sind eine Basis genau dann, wenn $\{[v_1]_\mathcal{C}, \ldots, [v_k]_\mathcal{C}\}$ eine Basis ist.

Alle Aussagen stimmen, denn sie gelten für jeden Isomorphismus $T : V \to W$. Also insbesondere auch für $\Phi_\mathcal{C} : V \to K^k$.

2. Sei $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_7[x]_4, M_{2\times 3}(\mathbb{F}_7))$ und $A = [T]^\mathcal{B}_\mathcal{C}$ eine Darstellungsmatrix der Abbildung T. Dann gilt:

(a) $A \in M_{5\times 6}(\mathbb{F}_7)$

(b) $A \in M_{6\times 6}(\mathbb{F}_7)$

√ (c) $A \in M_{6\times 5}(\mathbb{F}_7)$

Für $T \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ gilt, dass $T \in M_{\dim W, \dim V}(K)$.

3. Sei V ein Vektorraum mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $[\mathrm{Id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = I_n$ für alle Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq V$.

Dies ist falsch. Betrachten Sie zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ und $\mathcal{C} = (e_2, e_1)$, wobei e_i der i-te Basisvektor der Standard-Basis ist für $i = 1, 2$.

√ (b) $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}} := [\mathrm{Id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \in \mathrm{GL}_n(K)$ für alle Basen $\mathcal{B} \subseteq V$.

Korollar 3.63

√ (c) $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}} := [\mathrm{Id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = I_n$ für alle Basen $\mathcal{B} \subseteq V$.

Dies folgt aus einer direkten Berechnung von $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}$ (vgl. Korollar 3.63).

(d) Falls $T \in \mathrm{End}(V)$ dann folgt, dass $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Dies ist falsch. Man kann zum Beispiel $T = 0$ die Nullabbildung betrachten.

(e) Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind für alle Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{C}, \mathcal{C}' \subseteq V$ die Matrizen $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ und $[T]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}$ ähnlich.

Dies ist falsch. Im Allgemeinen ist nur wahr, dass $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ und $[T]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}$ ähnlich sind (Korollar 3.64).

4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Dann impliziert $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$, dass A und B äquivalent sind.

Das ist wahr. Es gilt auch die umgekehrte Implikation (vgl. Bemerkung 3.73).

√ (b) Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ zwei ähnliche Matrizen, dann sind A und B auch äquivalent.

Dies folgt direkt aus der Definition ähnlicher bzw. äquivalenter Matrizen.

(c) Es existieren Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(K)$, die ähnlich sind, aber verschiedenen Rang haben.

Das ist falsch. Siehe Begründungen von (a) und (b).

(d) In $M_{3\times 3}(K)$ gibt es 3 Äquivalenzklassen bezüglich der Relation „Äquivalenz“.

Dies ist falsch. Es gibt 4 Äquivalenzklassen, da wir 4 Möglichkeiten für den Rang von A haben, nämlich $\mathrm{Rang}(A) = 0, 1, 2, 3$.

5. Seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $\mathrm{Hom}(V,W) = \mathrm{Hom}(W,V)$

Das ist falsch. Nehmen Sie zum Beispiel $V = K^2$ und $W = K^3$.

√ (b) $\mathrm{Hom}(V,W) \cong \mathrm{Hom}(W,V)$

√ (c) $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim \mathrm{Hom}(W,V)$

Die letzte Aussage ist wahr wegen Korollar 3.83. Also ist wegen Korollar 3.32 auch die zweite Aussage wahr.

6. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene durch den Ursprung. Dann ist $\mathbb{R}^3/P$ die Menge aller Geraden, die parallel zu P sind.

Das ist falsch. Die Menge $\mathbb{R}^3/P$ ist die Menge aller Ebenen, die parallel sind zu P (vgl. Beispiel 3.121).

√ (b) Sei $0 \neq v \in K^n$. Dann ist $\dim(K^n/\,\mathrm{Sp}(v)) = n - 1$.

Das ist richtig wegen Korollar 3.124 und $\dim \mathrm{Sp}(v) = 1$.

7. Jede Basiswechselmatrix der Form $[\mathrm{Id}_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ für geordnete Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V ist invertierbar.

√ (a) richtig

(b) falsch

Nach Lemma 3.61 gilt mit $\dim V = n$, dass

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} &= [\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = I_n, \\
[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} &= [\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = I_n.
\end{aligned}
$$