MC-Fragen Serie 12: Aufgaben

Einsendeschluss: Dienstag, der 15.12.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Wir betrachten $V = \mathbb{R}^4$ und $W = \mathbb{R}^3$ als Vektorräume über $\mathbb{R}$.

Sei $m_A : V \to W$ die durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ induzierte lineare Abbildung.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Für jeden Untervektorraum U von V gilt: $V/U \cong W$.

Betrachte $U = \{0_V\}$.

Laut Korollar 3.124 im Skript zur Vorlesung gilt: $\dim(V/U) = 4 \neq 3 = \dim W$.

(b) Für jeden Untervektorraum U von V sodass $U \subseteq \operatorname{Ker}(m_A)$ gilt:

$$V/U \cong \operatorname{Sp}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

Betrachte $U = \{0_V\}$. Laut Korollar 3.124 im Skript zur Vorlesung gilt dann: $\dim(V/U) = 4$. Da die zwei aufspannenden Vektoren linear unabhängig sind, ist die Dimension von $\operatorname{Sp}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right)$ allerdings 2.

√ (c)

$$V/\operatorname{Sp}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right) \cong \operatorname{Im}(m_A).$$

Die Matrix A hat Rang 2. Es gilt also $\dim \operatorname{Im}(A) = 2$ und nach dem Rangsatz $\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$. Beachte, dass die zwei Vektoren und damit der von ihnen aufgespannte Untervektorraum im $\operatorname{Ker}(m_A)$ liegen. Die Aussage folgt also aus Proposition 3.125 im Skript zur Vorlesung.

√ (d) $\dim(V/\operatorname{Ker}(m_A)) = 2$.

Folgt aus Korollar 3.124 im Skript zur Vorlesung, da $\operatorname{Rang}(A) = 2$ ist.

2. Die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$$

ist

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 4.

√ (e) 8.

Führe nacheinander folgende elementaren Zeilenumformungen durch:

- Addiere die erste Zeile zur zweiten Zeile.
- Addiere $\frac{1}{2}$ mal die zweite Zeile zur dritten Zeile.
- Addiere $\frac{2}{3}$ mal die dritte Zeile zur vierten Zeile.
- Addiere $\frac{3}{5}$ mal die vierte Zeile zur fünften Zeile.

Wir erhalten eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ und $\frac{8}{5}$. Es folgt, dass die Determinante 8 ist. Daher ist Antwort (e) korrekt.

3. Sei $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 4$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 8$.

Falsch, denn

$$\det\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 2^2 \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2^2 \cdot 4 = 16.$$

√ (b) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = 4$.

Richtig, denn

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 4.$$

√ (c) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+2a & d+2b \end{pmatrix} = 4$.

Richtig, denn

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+2a & d+2b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 4.$$

√ (d) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 12$.

Richtig, folgt aus der Multilinearität der Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 12$$

4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $\det\colon \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

(a) injektiv.

Sei $n = 2$. Es gilt:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

√ (b) surjektiv.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $y \in \mathbb{R}$.

Betrachte die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $a_{ij} = \begin{cases} y \text{ wenn } i = j = 1, \\ 1 \text{ wenn } i = j \neq 1, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$

(c) linear.

Sei $n = 2$ uns seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Es gilt:

$$\det(A + B) = 0 \neq 2 = \det(A) + \det(B)$$

√ (d) multilinear bezüglich Zeilen.

Siehe Definition 4.5 im Skript zur Vorlesung.

√ (e) alternierend.

Siehe Definition 4.5 im Skript zur Vorlesung.

5. Sei A eine reelle 2×2-Matrix, $m_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist

(a) $\dim \operatorname{Ker} m_A = 2 - \det(A)$

Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $\det(A) = 30$ aber $\dim \operatorname{Ker} m_A \neq -28$

√ (b) $\dim \operatorname{Ker} m_A = 1 \Rightarrow \det(A) = 0$

Es gilt $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist. Falls $\dim \operatorname{Ker} m_A > 0$, dann ist m_A nicht injektiv und also nicht invertierbar. Folglich ist A nicht invertierbar und somit ist $\det(A) = 0$.

(c) $\dim \operatorname{Ker} m_A = 1 \Rightarrow \det(A) = 1$

Siehe oben.

√ (d) $\dim \operatorname{Ker} m_A = 2 - \operatorname{Rang} L_A$

Das ist die Dimensionsformel.

√ (e) $\dim \operatorname{Ker} m_A = 2 \Leftrightarrow A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Falls $\dim \operatorname{Ker} m_A = 2$, dann folgt aus der Dimensionsformel, dass $\operatorname{Rang} m_A = 0$. Folglich ist $\operatorname{Im} m_A = \{0\}$.

Sei zum Ziel des Widerspruchs $\operatorname{Im} m_A = \{0\}$ und $A \neq 0$, und seien $i, j \in \{1, 2\}$ mit $A_{ij} \neq 0$. Dann ist $(m_A e_j)_i = A_{ij} \neq 0$ und folglich $\operatorname{Im} m_A \neq \{0\}$. Widerspruch.

6. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 16 & 64 \\ 8 & 64 & 512 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Die Determinante der Matrix A ist

√ (a) durch 2 teilbar.

√ (b) durch 3 teilbar.

(c) durch 5 teilbar.

(d) durch 7 teilbar.

√ (e) durch 8 teilbar.

(f) durch 9 teilbar.

Mittels elementaren Zeilenumformungen kann man A auf folgende Form bringen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 48 \\ 0 & 0 & 192 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt: $\det(A) = 2 \cdot 8 \cdot 192 = 3072.$