Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 12: Repetition

Einsendeschluss: Dienstag, der 15.12.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Sind die beiden Spalten einer 2×2 -Matrix A identisch, so gilt $\det(A) = 0$.

√ (a) richtig

(b) falsch

2. Sei $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ erhalten aus $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ mittels Vertauschung zweier Zeilen. Dann gilt $\det(B) = -\det(A)$.

√ (a) Richtig

(b) Falsch

3. Welche der folgenden Aussagen über 3×3-Matrizen ist falsch?

√ (a) Die Determinante des λ-fachen einer Matrix ist das λ-fache der Determinante der Matrix.

(b) Nach Vertauschung der ersten und dritten Spalte einer Matrix wechselt das Vorzeichen der Determinante.

(c) Subtraktion der zweiten Zeile von der ersten Zeile lässt die Determinante unverändert.

Aus der Multilinearität folgt $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$. Die anderen Aussagen sind wahr und wurden in der Vorlesung gezeigt.

4. Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Die Determinante der Matrix $A + B$ ist

(a) -4.

(b) -2.

(c) -1.

$\surd$ (d) 0.

(e) 2.

In der Matrix A+B ist die dritte Zeile eine Nullzeile.

5. Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$,
$E = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ und $F = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gilt:

$\surd$ (a) $\det(A) = -\det(B)$

(b) $\det(A) = -\det(C)$

$\surd$ (c) $9 \cdot \det(A) = \det(D)$

(d) $\det(A) = \det(E)$

(e) $\det(A) = \det(F)$

$\surd$ (f) $-9 \cdot \det(B) = \det(D)$

(g) $\det(B) = -\det(E)$

(h) $\det(B) = 3 \cdot \det(F)$

$\surd$ (i) $\det(D) = 3 \cdot \det(F)$

Siehe Proposition 4.7 im Skript zur Vorlesung.

6. Sei K ein Körper, seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über K und sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\surd$ (a) Wenn T injektiv ist, dann gilt: $V/\{0_V\} \cong \operatorname{Im}(T)$.

Folgt aus Proposition 3.21 und Proposition 3.125 im Skript zur Vorlesung.

(b) Wenn T surjektiv ist, dann gilt: $V/\operatorname{Ker}(T) \ncong W$.

Siehe Proposition 3.125 im Skript zur Vorlesung.

$\surd$ (c) Wenn T surjektiv ist, dann gilt: $\dim(W) = \dim(V/\operatorname{Ker}(T))$.

Folgt aus Proposition 3.125 und Korollar 3.29 im Skript zur Vorlesung.

(d) $\dim(V/\operatorname{Ker}(T)) \neq \dim(V)$ genau dann, wenn T injektiv ist.

Siehe Korollar 3.124 und Proposition 3.21 im Skript zur Vorlesung.

7. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Die Menge S_n hat $n!$ Elemente.

Per Definition von $S_n = \mathrm{Abb}(\{1,\dots,n\})$, und da es genau $n!$ bijektive Abbildungen von $\{1,\dots,n\}$ auf sich selbst gibt (siehe Skript).

(b) Es gilt $|A_n| = |S_n \setminus A_n| + 1$.

Dies ist falsch. Es gilt $|A_n| = |S_n \setminus A_n|$.

√ (c) Es gilt $\operatorname{sign}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} = +1$.

Das ist richtig, denn es gibt genau zwei Fehlstände.

(d) Für alle $n \geq 2$ ist S_n nicht-abelsch.

Das ist falsch. Für $n = 2$ ist S_n abelsch. Im Allgemeinen gilt nur, dass S_n für $n \geq 3$ nicht-abelsch ist.

√ (e) $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$

Das ist richtig, denn $\operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\mathrm{Id}) = 1$, also

$$\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = (\operatorname{sign}(\sigma))^{-1} \in \mathbb{Z},$$

was $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) \in \{\pm 1\}$ impliziert.

(f) $\det(A+B) = \det A + \det B$

Das ist falsch. Betrachten Sie zum Beispiel $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

(g) $\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1$

Laut Proposition 4.7 mit $L_1 \leftrightarrow L_3$ ist $\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = -1$.

√ (h) $\det\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1$

Laut Proposition 4.7 und vorheriger Aufgabe ist $\det\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} = (-1)^3\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = (-1)^4 = 1$.