Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 13: Aufgaben

Einsendeschluss: Dienstag, der 22.12.2020 um 10:00 Uhr

Falls nicht anders behauptet, ist in allen Aufgaben K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1?$$

√ (a) $x = 0$

(b) $x = 1$

√ (c) $x = 2$

(d) Keiner der obigen Vorschläge ist richtig.

Mit Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte erhalten wir

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1 * \underbrace{\det \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}}_{=x^2-1} - 1 * \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}}_{=x-1} + 1 * \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}}_{=1-x} = x^2 - 2x + 1.$$

Es ist $x^2 - 2x + 1 = 1$ genau dann, wenn $0 = x^2 - 2x = x(x-2)$.

2. (*Prüfung Sommer 2017*) Es gibt eine invertierbare, reelle 3×3 Matrix A, die schiefsymmetrisch ist, also für die $\det(A^T) = -\det(A)$ gilt.

(a) Richtig

√ (b) Falsch

Dies ist falsch, denn nach Aufgabe 3 (a) von Serie 13 gilt $\det(A) = 0$ für jede schiefsymmetrische Matrix in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, insbesondere gibt es keine solche Matrix, die auch noch invertierbar ist.

3. (*Prüfung Sommer 2017*) Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $m > n$. Dann gilt $\det(AB^T) = 0$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Es gilt $\mathrm{Rang}(AB^T) \leq \min\{\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B)\} \leq n < m$. Da AB^T eine $m \times m$-Matrix ist, hat AB^T also nicht vollen Rang

4. (*Prüfung Sommer 2017*) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\det\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Wir haben in den MC-Aufgaben zu Serie 12 gesehen, dass dies nicht stimmt.

5. (*Prüfung Sommer 2017*) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, dann gilt

$$\det(A+B) = \det(B+A).$$

$\surd$ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Da die Addition auf $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ kommutativ ist, gilt $A+B = B+A$ und somit insbesondere die Behauptung.

6. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $n \times n$-Matrizen A, deren sämtliche Einträge natürliche Zahlen sind?

(a) $\det(A) \geq 0$.

Falsch. Betrachte $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) A ist invertierbar.

Falsch. Betrachte $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\surd$ (c) Falls es eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ gibt, sodass alle Einträge von B ganze Zahlen sind und AB die Identitätsmatrix in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ist, dann ist $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Wahr. Es gilt: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1$. Aus der Leibniz-Formel folgt, dass $\det(A)$ und $\det(B) \in \mathbb{Z}$, also $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

(d) $|\det(A)| \leq n$.

Falsch. Betrachte $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \cap M_{n\times n}(\mathbb{Z})$, wobei $M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ die Menge aller Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ ist. Dann gilt $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Das ist falsch, denn z.B. ist $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ für alle $a \neq b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein Gegenbeispiel mit $\det A = ab \neq \pm 1$.

√ (b) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \cap M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ sodass $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \cap M_{n\times n}(\mathbb{Z})$. Dann gilt $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Es gilt $\det(A) \in \mathbb{Z}$ und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z}$, also die Behauptung.

(c) Keine der beiden Aussagen

8. Seien $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $\det B = 2, \det A \neq 0$. Dann ist $\det(5AB^3A^{-1}B^{-1}) =$

(a) 25

(b) 50

√ (c) 100

(d) 0

Es gilt

$$\det(5AB^3A^{-1}B^{-1}) = 5^2 \det(A) \det(B)^3 \det(A)^{-1} \det(B)^{-1} = 25 \det(B)^2 = 25 \cdot 2^2 = 100.$$

9. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

√ (a) Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ mit $A^2B - A^2 \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann ist

$$BA - A \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Es gilt

$$\det\left(A^2B - A^2\right) = \det\left(A^2\right)\det(B - I_n) = \det(A)^2\det(B - I_n) \neq 0,$$

also $\det A \neq 0$ und $\det(B - I_n) \neq 0$. Wir erhalten

$$\det(BA - A) = \det(B - I_n)\det(A) \neq 0$$

und $BA - A$ ist invertierbar.

√ (b) Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ mit $AB^2 - A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann ist

$$BA - A \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Es gilt

$$\det\left(AB^2 - A\right) = \det(A)\det(B^2 - I_n) = \det(A)\det(B - I_n)\det(B + I_n) \neq 0,$$

also $\det A \neq 0$ und $\det(B - I_n) \neq 0$. Wir erhalten

$$\det(BA - A) = \det(B - I_n)\det(A) \neq 0$$

und $BA - A$ ist invertierbar.

(c) Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ mit $A^2 - B^2 \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann ist

$$A + B \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Dies ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0, \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4, \end{pmatrix}, A^2-B^2 = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ -15 & -23, \end{pmatrix} \text{ mit } \det(A^2-B^2) = 34 \neq 0.$$

Die Aussage ist allerdings wahr, falls $AB = BA$ gilt. Dann gilt nämlich

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

und damit $\det(A^2 - B^2) \neq 0$ impliziert $\det(A + B) \neq 0$.