D-MATH Lineare Algebra I HS 2020
Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 13: Repetition

Einsendeschluss: Dienstag, der 22.12.2020 um 10:00 Uhr

Falls nicht anders behauptet, ist in allen Aufgaben K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

1. *(Prüfung Winter 2017)* Sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann gilt $\det\left(A^T\right) = -\det(A)$.

(a) Richtig.

$\checkmark$ (b) Falsch.

Es ist $I_n = I_n^T$, folglich ist $-\det(I_n) = -1 \neq 1 = \det\left(I_n^T\right)$.

2. Sei $\operatorname{char} K \neq 2$ und E eine Elementarmatrix, so gilt $\det(E) = \pm 1$.

(a) Richtig

$\checkmark$ (b) Falsch

Dies ist falsch, denn nach Lemma 4.12 gilt $\det(S_i(\alpha)) = \alpha$ für alle $\alpha \in K$.

3. Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Matrizen A und B aus $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $n \geq 2$ korrekt?

√ (a) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Das ist Proposition 4.13.

√ (b) Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spalten von A als Vektoren von $\mathbb{R}^n_{Spal}$ linear unabhängig sind.

Richtig, denn $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Rang} A = n$.

√ (c) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.

Richtig, da

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$$

(d) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

Falsch, betrachte zum Beispiel

$$\det\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt für $A \in M(n \times n, K)$:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

4. Zur Erinnerung: Es ist $A_n = \{\text{alle geraden Permutationen}\} \subseteq S_n$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $|A_n| = \frac{|S_n|}{2} + 1$

Dies ist falsch, denn nach Korollar 4.35 gilt $|A_n| = \frac{|S_n|}{2}$.

(b) $S_n \setminus A_n = A_n\tau$ für alle $\tau \in S_n$

Dies ist falsch, gilt aber für alle $\tau \in S_n$ mit $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$.

√ (c) Es gibt $\binom{n}{2}$ Transpositionen in S_n.

√ (d) Es gilt $\mathrm{sign}(\sigma \circ \sigma) = 1$ für alle $\sigma \in S_n$.

Dies folgt daraus, dass $\mathrm{sign}\colon S_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein Homomorphismus ist.

5. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\checkmark$ (a) Es gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ für alle $A \in \mathrm{GL}_{n\times n}(K)$.

Es gilt $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$.

(b) Falls $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist für $a, b, c, d \in K$, dann ist $\operatorname{adj} A = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Es gilt $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$\checkmark$ (c) Falls $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist, dann ist $\operatorname{adj}(A) \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Es gilt

$$\operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1},$$

also

$$\det\left(\operatorname{adj}(A)\right) = \frac{(\det A)^n}{\det(A)} = \det(A)^{n-1}.$$

(d) Es gilt $\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)$ für alle $A \in M_{n\times n}(K)$.

Das ist falsch, siehe Begründung zum Teil (c).

$\checkmark$ (e) Es gilt $\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)$ für alle $A \in M_{2\times 2}(K)$.

Das ist richtig (für $n = 2$), siehe Begründung zum Teil (c).