MC-Fragen Serie 2 - Teil 2

Einsendeschluss: Montag, der 05.10.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Für eine Menge X sei $\mathbb{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von X. Wir definieren die Relation $\mathcal{R}$ auf $\mathbb{P}(X)$ durch $A\mathcal{R}B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$. Entscheiden Sie, ob die untenstehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

√ (a) $\mathcal{R}$ ist transitiv

√ (b) $\mathcal{R}$ ist reflexiv

(c) $\mathcal{R}$ ist symmetrisch

(d) $\mathcal{R}$ ist eine Äquivalenzrelation

(e) Keine der obigen Aussagen ist wahr

2. Sei $\mathcal{R}$ die Relation auf $\mathbb{N}$, so dass $n\mathcal{R}m$ genau dann, wenn $n \cdot m$ gerade ist. Entscheiden Sie, ob die untenstehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) $\mathcal{R}$ ist transitiv

(b) $\mathcal{R}$ ist reflexiv

√ (c) $\mathcal{R}$ ist symmetrisch

(d) $\mathcal{R}$ ist eine Äquivalenzrelation

(e) Keine der obigen Aussagen ist wahr

3. Sei die Relation $\mathcal{R}$ auf $\{1, 2, 3\}$ gegeben durch

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3))\}.$$

Entscheiden Sie, ob die untenstehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

√ (a) $\mathcal{R}$ ist transitiv

√ (b) $\mathcal{R}$ ist reflexiv

(c) $\mathcal{R}$ ist symmetrisch

(d) $\mathcal{R}$ ist eine Äquivalenzrelation

(e) Keine der obigen Aussagen ist wahr

4. Sei $\mathcal{R}$ die Relation auf $\mathbb{N}$ so dass $n\mathcal{R}m$ genau dann wenn n und m die gleiche Parität haben. Entscheiden Sie, ob die untenstehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

$\surd$ (a) $\mathcal{R}$ ist transitiv

$\surd$ (b) $\mathcal{R}$ ist reflexiv

$\surd$ (c) $\mathcal{R}$ ist symmetrisch

$\surd$ (d) $\mathcal{R}$ ist eine Äquivalenzrelation

(e) Keine der obigen Aussagen ist wahr

5. Sei A eine Menge mit $|A| = n$. Was ist $|\mathbb{P}(\mathbb{P}(A))|$?

$\surd$ (a) $2^{(2^n)}$

(b) 2^n

(c) $2^{(n^2)}$

(d) $2^{(2n)}$

(e) Keine der obigen Aussagen ist wahr

6. Entscheiden Sie jeweils für die zwei gegebenen Mengen, ob sie gleichmächtig sind.

$\surd$ (a) $\mathbb{N}$ und die Menge der geraden natürlichen Zahlen

$\surd$ (b) $\mathbb{N}$ und die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen

$\surd$ (c) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$

$\surd$ (d) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^2$

$\surd$ (e) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$

(f) Keine der obigen Aussagen ist wahr

Zu (a): Die Abbildung $\varphi(n) = 2n$ ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und der Menge der geraden natürlichen Zahlen. Zu (b): Die Abbildung $\theta(n) = 2n + 1$ ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und der Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Zu (c): Mit φ und θ kann man die gesuchte Bijektion bilden. Zu (d) und (e): Dies werden Sie auf Serie 2 in Aufgabe 6 sehen.

7. Seien A und B unendliche Mengen. A und B sind dann gleichmächtig.

(a) Wahr

$\surd$ (b) Falsch

Die Aussage ist falsch, denn zum Beispiel sind $\mathbb{N}$ und die Potenmenge von $\mathbb{N}$ beide unendliche Mengen, aber nicht gleichmächtig.

8. Seien A und B Mengen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) $A \cup B$ und A sind nie gleichmächtig

(b) $A \cup B$ und B sind nie gleichmächtig

$\surd$ (c) Keine der obigen Aussagen ist wahr

Beide Aussagen sind falsch, da die Menge der natürlichen und die Menge der geraden (oder auch ungeraden) natürlichen Zahlen gleichmächtig sind.

9. Welche der folgenden Aussagen über die Mächtigkeiten von Mengen sind richtig?

$\surd$ (a) $\mathbb{N}$ und die Menge der geraden Zahlen sind gleichmächtig.

$\surd$ (b) $\mathbb{N}$ und die Menge der Primzahlen sind gleichmächtig.

(c) $\{0,1\}^5$ und $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ sind gleichmächtig.

(d) $\{0,1\}^2$ und $\{a,b\}$ sind gleichmächtig.

$\surd$ (e) $\{0,1\}^3$ und $\{1,2,\ldots,8\}$ sind gleichmächtig.

$\surd$ (f) Sei M eine endliche Menge. Dann sind $\mathbb{P}(M)$ und $\{0,1\}^{|M|}$ gleichmächtig.

(b). Wir konstruieren eine bijektive Abbildung der Menge der Primzahlen $\mathbb{P}$ auf die natürlichen Zahlen. Eine injektive Abbildung existiert per definitionem von $\mathbb{P}$. Um eine surjektive Abbildung zu finden, müssen wir insbesondere zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Zuerst stellen wir fest, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ein $p \in \mathbb{P}$ existiert, so dass $p \mid n$. Die Aussage stimmt für die Zahl $n = 2$. Sei die Aussage also bewiesen für alle natürlichen Zahlen $2 \leq k \leq n$. Wir wollen sie für $n+1$ zeigen. Falls $n+1 \in \mathbb{P}$, dann sind wir fertig. Sei also $n+1 \notin \mathbb{P}$. Dann existiert per definitionem eine natürliche Zahl $2 \leq k \leq n$ so dass $k \mid n$, d.h. $n+1 = lk$ für ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq 2$. Per Annahme hat k einen Primteiler, i.e. es gibt $p \in \mathbb{P}$ mit $k = pm$ für ein $m \in \mathbb{N}$, also $n+1 = pml$ und also $p \mid n+1$, was zu beweisen war. Sei nun $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{P}$ eine beliebige, endliche Teilmenge. Betrachte die Zahl $q := p_1 \cdots p_n + 1$, dann gilt $p_i \nmid q$ für alle $1 \leq i \leq n$. Allerdings hat q wie vorher gezeigt einen Primteiler, also existiert ein $p \in \mathbb{P}$ mit $p \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$ und da die $p_1, \ldots, p_n$ beliebig waren, gibt es keine endliche Menge, die alle Primzahlen enthält. Sei nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ p_n die n-te Primzahl, i.e. es gibt genau $n-1$ Primzahlen p so dass $p < p_n$, und definiere eine Abbildung $\psi : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$ durch $p_n \mapsto n$. Diese Abbildung ist injektiv und surjektiv.

(f). Dies werden Sie in der Analysis I - Serie 1, Aufgabe 6, sehen.