D-MATH Lineare Algebra I HS 2020
Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 3: Aufgaben

Einsendeschluss: Montag, der 12.10.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Die zwei folgenden Gleichungssysteme haben die gleiche Lösungsmenge.
(I_1), (I_2), (I_3) und (J_1), (J_2), (J_3) sind hier nur Namen für die Zeilen im linken und rechten System.

$$\begin{cases} x+2y-z=4 & (I_1) \\ x+y+z=3 & (I_2) \\ 2x+y+z=5 & (I_3) \end{cases} \begin{cases} 2x+4y-2z=8 & (J_1) \\ -x-y-z=-3 & (J_2) \\ 6x+3y+3z=15 & (J_3) \end{cases}$$

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Wahr, da $(J_1) = 2(I_1)$, $(J_2) = -(I_1)$ und $(J_3) = 3(I_3)$.

2. Die zwei folgenden Gleichungssysteme haben die gleiche Lösungsmenge.

$$\begin{cases} x+2y-z=4 & (I_1) \\ x+y+z=3 & (I_2) \\ 2x+y+z=5 & (I_3) \end{cases} \begin{cases} x+2y-z=4 & (J_1) \\ x+y+z=3 & (J_2) \\ 4x+4y+z=12 & (J_3) \end{cases}$$

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Wahr, da $(J_3) = (I_3) + (I_2) + (I_1)$, $(J_2) = (I_2)$ und $(J_1) = (I_1)$.

3. Die zwei folgenden Gleichungssysteme haben die gleiche Lösungsmenge.

$$\begin{cases} x+2y-z=4 & (I_1) \\ x+y+z=3 & (I_2) \\ -x-2y+z=-5 & (I_3) \end{cases} \begin{cases} 4x-2y+2z=8 & (J_1) \\ -x+3y-z=5 & (J_2) \\ 2x-y+z=2 & (J_3) \end{cases}$$

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Wahr, da $(I_1)+(I_3)$ ergibt $0=-1$ und $\frac{1}{2}(J_1)-(J_3)$ ergibt $0=2$. Das heisst die Lösungsmengen sind immer leer. Daher haben die Systeme die gleiche Lösungsmenge.

4. Für die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und den reellen Vektor $b = (1, 2, 0)^T$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

$\surd$ (a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Man kann den Gauss-Algorithmus verwenden, um das System mit rechter Seite b in Zeilenstufenform zu bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - \frac{1}{2}L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - \frac{1}{2}L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right)$$

Damit sieht man sofort, dass es keine Lösung geben kann, da $-3/2 \neq 0$.

5. Für die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

$\surd$ (c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus kann man das Gleichungsystem in diese Form bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - \frac{1}{2}L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - \frac{1}{2}L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 + L_2 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

wobei man sieht, dass das System die Lösungsmenge $\left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ hat.