Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 4: Aufgaben

Einsendeschluss: Montag, der 19.10.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Für welche der folgenden Verknüpfungen können wir eine Gruppe $(G, \circ, e)$ definieren?

(a) $G = \mathbb{N}$, $a \circ b := \min\{a, b\}$

$\surd$ (b) $G = \{1, -1\}$, $a \circ b := a \cdot b$ ("Standard"-Multiplikation)

(c) $G = \mathbb{N}$, $a \circ b := a \cdot b$

(d) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $a \circ b := a^b$

(e) $G = \mathbb{Z}$, $a \circ b := -a \cdot b$

$\surd$ (f) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, $a \circ b := \frac{ab}{1-(a+b)+2ab}$

$\surd$ (g) $G = \mathbb{R}^n$, wobei $\circ$ ist die Vektoraddition

(h) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

(a) Es existiert kein neutrales Element.
Beweis: Angennomen es existiert ein $e \in \mathbb{N}$, sodass $a = e \circ a = \min\{e, a\}$ für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere ist also $e \geq a \quad \forall a \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch ist.
(b) Die Multiplikation ist auf G wohldefiniert, denn

$$\forall a, b \in \{1, -1\} \text{ gilt } a \cdot b \in \{1, -1\}.$$

Sie ist auch assoziativ, das neutrales Element ist 1 und es existiert ein multiplikativ inverses Element für -1:

$$(-1)^{-1} = -1 \in \{1, -1\}.$$

(c) Es gibt keine mulitplikativ Inversen zu $1 \neq n \in \mathbb{N}$, zum Beispiel $2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.
(d) Die Verknüpfung ist nicht assoziativ (Überprüfen Sie das!).
(e) Wie in (c) gibt es keine Inversen.
(f) Die Verknüpfung ist wohldefiniert, denn der Zähler ist nie gleich 0:

$$\forall a, b \in G \text{ gilt } 1 - (a + b) + 2ab > 1 - (a + b) + ab = (1 - a)(1 - b) > 0$$

und

$$\forall a, b \in G \text{ gilt } a \circ b \in (0, 1).$$

Sie ist auch assoziativ (Überprüfen Sie das!).
Wenn man die Gleichung $a \circ e = \frac{ae}{1-(a+e)+2ae} = a$ nach e auflöst, sieht man, dass das neutrales Element $e = \frac{1}{2}$ ist. Man muss noch überprüfen, ob es Inverse in G gibt, das heisst für alle $a \in G$ suchen wir ein $b \in G$ mit $a \circ b = \frac{1}{2}$. Es gilt

$$a \circ b = \frac{ab}{1 - (a + b) + 2ab} = \frac{1}{2} \iff 2ab = 1 - (a + b) + 2ab \iff b = 1 - a.$$

Wir haben also $\forall a \in G : \quad a^{-1} = 1 - a \in G$.

2. Wähle die richtigen Aussagen aus.

(a) $\mathbb{N}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$

√ (b) $\mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$

√ (c) $3\mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$

(a) ist falsch, denn $\mathbb{N}$ ist keine additive Gruppe. Das Inverse von 1 in $(\mathbb{Z}, +)$ ist -1, also nicht in $\mathbb{N}$ enthalten.

3. Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

√ (a) $\varphi\colon (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, \cdot)$, $\varphi(x) = 5^x$

(b) $\psi\colon (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$, $\psi(x) = x + 2$

(c) Keine der obigen Abbildungen ist ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Es gilt $\varphi(a + b) = 5^{a+b} = 5^a \cdot 5^b = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.
(b) $\psi(a + b) = a + b + 2 \neq \psi(a) + \psi(b) = a + 2 + b + 2$

4. Die Quotientenabbildung $p\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $p(a) = \overline{a}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Es gilt $p(a + b) = \overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b} = p(a) + p(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

5. In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gilt

√ (a) $\overline{3} + \overline{4} = \overline{2}$

√ (b) $\overline{3} + \overline{4} = \overline{7}$

(c) $\overline{3} + \overline{4} = \overline{5}$

√ (d) $\overline{3} - \overline{4} = \overline{4}$

(e) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

(a), (b), (c) Es gilt

$$\overline{3} + \overline{4} = \overline{3 + 4} = \overline{7} = \{7 + 5n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{2 + 5n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \overline{2},$$

7 und 2 sind Repräsentanten derselben Klasse.
(d)

$$\overline{3} - \overline{4} = \overline{3} + (\overline{-4}) = \overline{3 + (-4)} = \overline{-1} = \overline{-1 + 5} = \overline{4}$$

Wir haben verwendet, dass $\overline{n} = \overline{n + 5}$ gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ wegen der Definition der Restklassen.