MC-Fragen Serie 4: Repetition

Einsendeschluss: Montag, der 19.10.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Sei $\varphi : (G, 0, +) \longrightarrow (H, 0, +)$ ein Gruppenhomomorphismus (mit additiver Schreibweise). Dann gilt

√ (a) $\forall a, b \in G,\ \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

(b) $\forall a, b \in G,\ \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

√ (c) $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall a \in G,\ \varphi(k \cdot a) = k \cdot \varphi(a)$

√ (d) $\varphi(0) = 0$

√ (e) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$

(f) $\varphi(1) = 1$

(g) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

(c) ist richtig, denn $\varphi(k \cdot a) = \varphi(a + a + ... + a) = \varphi(a) + \varphi(a) + ... + \varphi(a) = k \cdot \varphi(a)$.

2. Die Restklasse modulo 5 von 3 ist

√ (a) $\{3 + 5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

(b) $\{5 + 3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

√ (c) $\{18 + 5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

√ (d) $\{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n}{5} = k + \frac{3}{5}$ für ein $k \in \mathbb{Z}\}$

(e) $\{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n}{5} = 3 + \frac{k}{5}$ für ein $k \in \mathbb{Z}\}$

√ (f) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n$ hat Rest 3 bei Division durch 5$\}$

(g) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n$ hat Rest 5 bei Division durch 3$\}$

(h) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

Die Restklasse ist die Menge aller Zahlen, die bei Division durch 5 Rest 3 haben. Es gilt

$$\{3 + 5n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{18 + 5n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{..., -2, 3, 8, 13, 18, ...\}$$

3. Sei H eine Untergruppe von $(G, \cdot)$, dann gilt

$\checkmark$ (a) $\forall a, b \in H,\ a \cdot b \in H$

$\checkmark$ (b) $\forall a \in H,\ a^{-1} \in H$

(c) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

4. Sei $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper. Dann gilt

(a) K zusammen mit Multiplikation $\cdot$ ist eine abelsche Gruppe.

$\checkmark$ (b) $K \backslash \{0\}$ zusammen mit der Multiplikation $\cdot$ ist eine abelsche Gruppe.

$\checkmark$ (c) Die Addition und die Multiplikation sind assoziativ.

$\checkmark$ (d) K hat mindestens zwei Elemente.

$\checkmark$ (e) $\forall a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

(f) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

(a) ist falsch, denn $0 \in K$ hat keine multiplikative Inverse. $(K, \cdot)$ ist also keine Gruppe.

5. Wähle die richtigen Aussagen aus.

$\checkmark$ (a) $3 \equiv 5 \mod 2$

$\checkmark$ (b) $-3 \equiv -5 \mod 2$

$\checkmark$ (c) $10^k \equiv 1 \mod 3\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(d) $10^k \equiv 1 \mod 11\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(e) $10^k \equiv 0 \mod 5\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(a), (b) 3, 5, -3 und -5 können als $2n + 1$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden. Sie sind also kongruent 1 modulo 2.
(c) $10^k - 1 = 99 \cdots 9$ (mit k Neunern) ist durch 3 teilbar, also $10^k - 1 \equiv 0$ modulo 3, d.h. $10^k \equiv 1 \mod 3$.
(d) Betrachte den Fall $k = 1$. Man sieht, dass die Division von 10 bei 11 nicht Rest 1 hat, sondern Rest $10 \equiv -1 \mod 11$.
(e) 10^k ist immer duch 5 teilbar, insbesondere ist der Rest 0 für $k \neq 0$. Für $k = 0$ gilt $0^0 = 1 \mod 5$.