MC-Fragen Serie 5: Aufgaben

Einsendeschluss: Montag, der 26.10.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Jedes Polynom von Grad 5 in $\mathbb{C}[x]$ muss eine relle Nullstelle haben.

(a) wahr

√ (b) falsch

Das ist falsch, denn z.B. hat $f = (x - i)^5 \in \mathbb{C}[x]$, die Nullstelle $x = i$ mit Vielfachheit $\mu(f|i) = 5$ und damit keine reelle Nullstelle.

2. Jedes Polynom vom Grad 5 in $\mathbb{R}[x]$ muss eine reelle Nullstelle haben.

√ (a) wahr

(b) falsch

Dies folgt aus dem Korollar am Ende von Abschnitt 1.3.10 in Fischer.

3. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(\lambda_1) = 0$, $\mathrm{Im}(\lambda_2) = 0, \mathrm{Im}(\lambda_3) \neq 0$. Welche der folgenden Aussagen könnten wahr sein?

√ (a) Es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(p) = 5$, sodass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die einzigen Nullstellen von p sind.

√ (b) Es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(p) = 3$, sodass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die einzigen Nullstellen von p sind.

(c) Es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, sodass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die einzigen Nullstellen von p sind.

√ (d) Es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, sodass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Nullstellen von p sind.

(e) Es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(p) = 5$, sodass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Nullstellen von p sind und $\mu(p|\lambda_3) = 2$.

√ (f) Es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(p) = 5$, sodass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Nullstellen von p sind und $\mu(p|\lambda_2) = 2$.

(a) ist richtig, $p = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)^2(x - \lambda_3)$ erfüllt die Bedingungen. (b) ist richtig, $p = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$ erfüllt die Bedingungen. (c) ist falsch, denn wenn $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom ist, müssen die komplex konjugierten der Nullstellen von p ebenfalls Nullstellen von p sein, insbesonder muss $\bar{\lambda_3} \neq \lambda_3$ ebenfalls eine Nullstelle von p sein. (d) ist richtig - es müssen einfach die komplex konjugierten der Nullstellen von p ebenfalls Nullstellen von p sein. (e) ist falsch, denn wenn $\mu(p|\lambda_3) = 2$ gilt, dann gilt auch $\mu(p|\bar{\lambda_3}) = 2$, sodass λ_1 und λ_2 nicht beide Nullstellen von p sein können wegen $\deg(p) = 5$. (f) ist richtig, $p = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)^2(x - \lambda_3)(x - \bar{\lambda_3})$ erfüllt die Bedinungen.

4. Seien $f, g \in \mathbb{F}_3[x]$, $f = x^2+1$ und $g = x^4+2$. Seien $q, r \in \mathbb{F}_3[x]$ die eindeutigen Polynome nach Division mit Rest mit $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$. Dann gilt

(a) $\deg(q) = 4$

(b) $\deg(q) = 0$

√ (c) $\deg(q) = -\infty$

(d) $\deg(q) = 2$

(e) $\deg(q) = \infty$

5. Seien $f, g \in \mathbb{F}_3[x]$, $f = x^2+1$ und $g = x^4+2$. Seien $q, r \in \mathbb{F}_3[x]$ die eindeutigen Polynome nach Division mit Rest mit $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$. Dann gilt

(a) $\deg(r) = 4$

(b) $\deg(r) = 0$

√ (c) $\deg(r) = 2$

(d) $\deg(q) = \infty$

√ (e) $\deg(q) = -\infty$