MC-Fragen Serie 5: Repetition

Einsendeschluss: Montag, der 26.10.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Ist der Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ein Körper?

(a) Ja, $\mathbb{Z}$ ist ein Körper.

(b) Nein, denn die Distributivgesetze sind nicht erfüllt: $a \cdot (b + c) \neq (a \cdot b) + (a \cdot c)$ für $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

√ (c) Nein. Es gibt keine multiplikativ inversen Elemente a^{-1} für $a \in \mathbb{Z}$.

(d) Nein. Es gibt keine additiv inversen Elemente $-a$ für $a \in \mathbb{Z}$.

(c) ist richtig, z.B. gibt es kein $a \in \mathbb{Z}$, sodass $4a = 1$.

2. Welches ist ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[t]$?

√ (a) $p = 3 + \frac{1}{3}t^4 - \sqrt{4}t^6$

√ (b) $p = -1 + 0.45t + 0.95t^2$

(c) $p = -3 + \sqrt{2}t$

(d) $p = \pi t^2$

√ (e) $p = 0$

(c) und (d) sind falsch, denn $\sqrt{2}, \pi \notin \mathbb{Q}$.

3. Für welches der Polynome f gilt $\deg(f) = 0$?

(a) $f = 0$

√ (b) $f = 4$

(c) $f = 5t^2$

4. Sei f das Nullpolynom über $\mathbb{R}$. Dann gilt

√ (a) $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

√ (b) Der Grad von f ist $-\infty$.

√ (c) $f = 0$.

(d) Der Grad von f ist 0.

5. Wie viele Polynome vom Grad ≤ 3 gibt es über $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

(a) Keine

(b) 3

(c) 3^2

(d) 3^3

$\surd$ (e) 3^4

(f) Unendliche viele

Ein Polynom von Grad ≤ 3 über $\mathbb{F}_3$ hat als mögliche Koeffizienten $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2} \in \mathbb{F}_3$, es gibt also jeweils drei mögliche Koeffizienten für die Terme x^0, x^1, x^2, x^3. Also gibt es 3^4 solche Polynome.

6. Sei $f = 4 + 5t^{22} + 10t^{100}$ und $g = 10 + 8t^{10}$. Dann gilt

$\surd$ (a) $\deg(f) = 100$

(b) $\deg(f) = 122$

(c) $\deg(f+g) = 110$

$\surd$ (d) $\deg(f+g) = 100$

(e) $\deg(f+g) = 10$

$\surd$ (f) $\deg(g) = 10$

$\surd$ (g) $\deg(f \cdot g) = 110$

Der Grad eines Polynoms $a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n \neq 0$ ist $\max\{v \in \mathbb{N} : a_v \neq 0\}$. Also gilt $\deg(f) = 100, \deg(g) = 10$. Weiter gilt (in diesem Fall!)

$$\deg(f+g) = \max\{\deg(f), \deg(g)\} = \max\{100, 10\} = 100.$$

Außerdem ist $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g) = 100 + 10 = 110$.

7. Sei $f = 4 + 5t^{22} + 10t^{100}$ und $g = 10 + 8t^{10}$. Nach Division mit Rest sei $f = q \cdot g + r$ mit $\deg(r) < \deg(g)$, wobei q der Quotient und r der Rest ist. Was ist der Grad von q?

(a) $\deg(q) = 100$

(b) $\deg(q) = 10$

√ (c) $\deg(q) = 90$

(d) $\deg(q) = 10$

(e) $\deg(q) = 22$

In diesem Fall gilt $\deg f = \max\{\deg(qg), \deg(r)\} = \max\{\deg(q) + \deg g, \deg r\}$. Weiter gilt nach Division mit Rest $\deg(r) < \deg(g)$, also

$$\deg(q) + \deg(g) > \deg(r).$$

Damit ist $\deg(f) = \deg(q) + \deg(g)$, also

$$\deg(q) = \deg(f) - \deg(g) = 100 - 10 = 90.$$

8. Sei $f = 1 + t^2 + 10t^3$ und $g = 10 + t^2$. Nach Division mit Rest sei $f = qg + r$, wobei q der Quotient und r der Rest ist. Was ist r?

(a) $r = 10t + 1$

(b) $r = 10t$

√ (c) $r = -100t - 9$

(d) $r = -100t + 9$

(e) $r = 0$

9. Sei $f \in \mathbb{Q}[t]$ mit $\mu(f|2) = 5$, $\mu(f|5) = 10$ und $\mu(f|10) = 4$. Was könnte f sein?

√ (a) $f = (t-2)^5(t-5)^{10}(t-10)^4$

(b) $f = (t-2)^5(t-5)^{10}(t-10)^4 + 1$

√ (c) $f = 5(t-2)^5(t-5)^{10}(t-10)^4$

(d) $f = (t-2)^5(t-5)^4$

√ (e) $f = (t-2)^5(t-5)^{10}(t-10)^4(t-4)$