MC-Fragen Serie 6: Aufgaben

Einsendeschluss: Montag, der 02.11.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Sei $\mathbb{R}^\infty$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Zahlenfolgen versehen mit der Addition

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

√ (a) $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n = 0\}$ ist ein Untervektorraum.

Die Nullfolge $\mathbf{0}$, bei der alle Glieder gleich 0 sind, ist das neutrale Element bezüglich Addition und sicherlich $\mathbf{0} \in V$. Seien $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $a - \lambda \cdot b = (a_n - \lambda b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Annahme existieren N_a und N_b in $\mathbb{N}$, so dass $a_n = 0$ für alle $n \geq N_a$ und $b_n = 0$ für alle $n \geq N_b$. Sei $N := \max\{N_a, N_b\}$, dann gilt $a_n - \lambda b_n = 0$ für alle $n \geq N$, und folglich ist $a - \lambda \cdot b \in V$. Also ist V ein Untervektorraum (vgl. Aufgabe 3(a) auf Serie 6).

(b) $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n = 1\}$ ist ein Untervektorraum.

$\mathbf{0} \notin V$, also ist V kein Untervektorraum, denn (UVR1') ist verletzt (siehe Uebung 2.6 im Skript).

√ (c) $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid a_n = 0 \text{ falls } 2 \mid n\}$ ist ein Untervektorraum.

Sicherlich ist $\mathbf{0} \in V$. Seien $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $a - \lambda \cdot b = (a_n - \lambda b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so dass $2 \mid n$, dann ist $a_n = b_n = 0$ nach Annahme und folglich $a_n - \lambda b_n = 0$. Also ist $a - \lambda \cdot b \in V$ und folglich V ein Untervektorraum (vgl. Aufgabe 3(a) auf Serie 6).

(d) Keine der Aussagen ist wahr.

2. Es sei K ein Körper und

$$V = \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$$

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von V?

(a)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

Die Matrix $\mathbf{0} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist der Nullvektor in $\mathrm{Mat}_{2,2}(K)$. Aber $\mathbf{0} \notin W$. Also ist W kein Untervektorraum, denn (UVR') ist verletzt.

√ (b)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid d = 0 \right\}$$

Es gilt $\mathbf{0} \in W$. Seien $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in K$, dann ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda\alpha & b - \lambda\beta \\ c - \lambda\gamma & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Also ist W ein Untervektorraum.

√ (c)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\}$$

(d)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V | a, b, d \in K \right\}$$

3. Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum über $\mathbb{R}$ aller reellen Polynome. Wir bezeichnen mit $p'(x)$ die Ableitung von $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}[x]$?

(a) $V := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(x)^2 = x\}$

(b) $V := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 1\}$

√ (c) $V := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p''(x) = p'(x)\}$

(d) $V := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(-2) \geq 0\}$

Die Menge in (a) ist leer und damit kein Untervektorraum. Die Menge in (b) enthält nicht die Nullfunktion $p(x) = 0$ und die Menge in (d) enthält $p(x) = 1$, aber nicht $-p(x)$; somit sind beides keine Untervektorräume. Also kommt nur (c) als Untervektorraum in Frage.

In der Tat ist V aus (c) ein Untervektorraum. Zuerst bemerken wir, dass $0 \in V$. Wir erinnern uns weiter, dass für Funktionen p, q sowie Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$(p + \lambda q)'(x) = (p' + \lambda q')(x)$$

Seien also $p, q \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(p - \lambda \cdot q)''(x) =& ((p - \lambda \cdot q)')'(x) \\ =& (p' - \lambda \cdot q')'(x) \\ =& p''(x) - \lambda \cdot q''(x) \\ =& p'(x) - \lambda \cdot q'(x) \\ =& (p - \lambda \cdot q)'(x)\end{aligned}$$

Also ist V ein Untervektorraum.

4. Betrachte $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit folgender Addition und skalarer Multiplikation:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 b_2) \\ c \cdot (a_1, a_2) &:= (ca_1, a_2)\end{aligned}$$

für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für alle $c \in \mathbb{R}$. Mit diesen Verknüpfungen ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Vektorraum.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Das neutrale Element bezüglich $+$ ist $(0, 1)$. Dann hat aber $(0, 0)$ keine additive Inverse.

5. Welche der folgenden Teilmengen $V \subset \mathbb{R}^4$ sind Untervektorräume?

√ (a) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 | \exists x \in \mathbb{R} : v = (0, x, 2x, 3x)\}$

Sicherlich ist $(0,0,0,0) \in V$. Seien $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt für $z := \lambda y$ und $t := x - \lambda y$

$$(0,x,2x,3x) - \lambda(0,y,2y,3y) = (0,x,2x,3x) - (0,z,2z,3z) = (0,t,2t,3t) \in V$$

Bemerkung: Der Unterraum V ist eine Gerade in $\mathbb{R}^4$ durch den Ursprung.

(b) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 | \exists x \in \mathbb{R} : v = (x, x^2, x^3, x^4)\}$

Man bemerke, dass $v := (1,1,1,1) \in V$, aber $v + v = (2,2,2,2) \notin V$.

√ (c) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 | \exists x, y \in \mathbb{R} : v = (x, x+y, y, x-y)\}$

Sicherlich gilt $(0,0,0,0) \in V$. Seien $v = (x, x+y, y, x-y)$, $w = (s, s+t, t, s-t) \in V$ für $x, y, s, t \in \mathbb{R}$, dann gilt für $\alpha := x + s$ und $\beta := y + t$

$$v + w = (x+s, x+y+s+t, y+t, x-y+s-t) = (\alpha, \alpha+\beta, \beta, \alpha-\beta) \in V$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und seien $x' := \lambda x$, $y' := \lambda y$, dann ist

$$\lambda \cdot v = (\lambda x, \lambda(x+y), \lambda y, \lambda(x-y)) = (x', x'+y', y', x'-y') \in V.$$

√ (d) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 | \exists x, y \in \mathbb{R} : v = (x^2 - y^2, 0, 0, 0)\}$

Sicherlich gilt $(0,0,0,0) \in V$. Seien $v = (x^2 - y^2, 0, 0, 0)$ und $w = (s^2 - t^2, 0, 0, 0)$, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$v - \lambda w = (x^2 - y^2 - \lambda s^2 + \lambda t^2, 0, 0, 0)$$

und es bleibt zu zeigen, dass $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$c := x^2 - y^2 - \lambda s^2 + \lambda t^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Wir erinnern uns, dass in der Analysisvorlesung gezeigt wurde, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) := x^2$ surjektiv ist. Falls $c \geq 0$, dann existiert also ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $c = \alpha^2$ und für $\beta = 0$ folgt also $c = \alpha^2 - \beta^2$ wie gewünscht. Falls $c < 0$, dann ist $-c > 0$ und folglich existiert $\beta \in \mathbb{R}$ mit $-c = \beta^2$. Für $\alpha = 0$ folgt also $c = \alpha^2 - \beta^2$ wie gewünscht. Also ist V ein Unterraum.

(e) $V = \{v \in \mathbb{R}^4 | \exists x, y \in \mathbb{R} : x > y \wedge v = (x, y, 0, 0)\}$

$(0,0,0,0) \notin V$, also ist V kein Unterraum.

(f) Keine der Teilmengen ist ein Unterraum.

6. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume?

√ (a) $\mathbb{R}[X]$

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=z+3\}$

Der Nullvektor von $\mathbb{R}^3$ ist nicht enthalten.

√ (c) $\mathbb{R}^2$

(d) $E = \{(1,0)^T + t \cdot (1,-1)^T \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

Das Nullvektor von $\mathbb{R}^2$ ist nicht enthalten.

√ (e) $E = \{(0,0,0)^T + t \cdot (0,1,0)^T \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

E ist eine Ursprungsgerade von $\mathbb{R}^3$.

7. Betrachte $V = \mathbb{F}_2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Untervektorräume hat V mit genau zwei Elementen?

(a) 0

(b) 1

(c) n

√ (d) $2^n - 1$

(e) 2^n

Für $v \in \mathbb{F}_2^n$ gilt $v + v = 0$, also ist jedes Element zu sich selbst die additive Inverse. Der Nullvektor muss in jedem Untervektorraum enthalten sein. Nun können noch die anderen 2^{n-1} Elemente im Unterraum sein.

8. Seien $X = \{1,2,3,4\}$ und $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ der Vektorraum aus der Vorlesung bzw. Aufgabe 2 von Serie 6, wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X ist und Δ die symmetrische Differenz ist. Welche der Aussagen sind wahr?

√ (a) $\mathrm{Sp}(\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}) = \mathcal{P}(X)$

√ (b) Alle Teilmengen von X, die 2 nicht enthalten, bilden einen Untervektorraum von $\mathcal{P}(X)$.

(c) $\{S \subset X \mid |S| = 1\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Untervektorraum.

Der Nullvektor ist nicht enthalten, da $|\emptyset| = 0$.

√ (d) $\mathrm{Sp}(\{1\},\{2\}) = \mathrm{Sp}(\{1\},\{1,2\})$

Es gilt

$$\{1\}\Delta\{1,2\} = \{2\},$$

somit gilt $\subseteq$. Umgekehrt gilt

$$\{1\}\Delta\{2\} = \{1,2\}$$

und somit $\supseteq$.

√ (e) $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{P}(X)$.

Der Nullvektorraum ist immer ein Unterraum.