MC-Fragen Serie 6: Repetition

Einsendeschluss: Montag, der 02.11.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, seien v, $w \in V$ und a, $b \in K \setminus \{0\}$. Dann gilt:

(a) $(a+b) \cdot (v+w) = av + bw$

√ (b) $(a+b)v + (a+b)w = a(v+w) + b(v+w)$

√ (c) $a(a^{-1}v + b^{-1}w) = v + ab^{-1}w$

(d) $av + bw = aw + bv$

√ (e) $av + bw = bw + av$

2. In jedem Vektorraum V gilt für a, $b \in K$, $v \in V$: $av = bv \Rightarrow a = b$

(a) Richtig

√ (b) Falsch

Sei $v = 0_V$, dann ist $av = 0_V$ für alle $a \in K$.

3. In jedem Vektorraum V gilt für $a \in K$, v, $w \in V$: $av = aw \Rightarrow v = w$

(a) Richtig

√ (b) Falsch

4. Sei V ein Vektorraum, I eine endliche Indexmenge und J eine beliebige Indexmenge. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume?

$\surd$ (a) $\{0_V\}$

(b) $\bigcup_{i \in I} W_i$, wobei $W_i \subset V, i \in I$ Untervektorräume sind.

Betrachte in $\mathbb{R}^2$ die $x-$ und $y-$Achse. Die Vereinigung dieser beiden Unterräume ist kein Vektorraum, da zum Beispiel

$$(1,0)^T + (0,1)^T = (1,1)$$

nicht enthalten ist.

(c) $\bigcup_{j \in J} W_j$, wobei $W_j \subset V, j \in J$ Untervektorräume sind.

$\surd$ (d) $\bigcap_{i \in I} W_i$, wobei $W_i \subset V, i \in I$ Untervektorräume sind.

$\surd$ (e) $\bigcap_{j \in J} W_j$, wobei $W_j \subset V, j \in J$ Untervektorräume sind.

Sei $W = \bigcap W_j$. Da 0 in allen W_j enthalten ist, ist auch $0 \in W$, also $W \neq \emptyset$. Sind $v, w \in W$, so sind v, w in allen W_j enthalten. Da dann auch $v + w$ in allen W_j enthalten ist, ist $v + w$ in W enthalten. Analog zeigt man, dass $\lambda \in K$ und $v \in W$ auch $\lambda v \in W$ gilt. (Siehe Lemma 2.34)

5. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\emptyset \subset V$ ist ein Untervektorraum.

$0_V \notin \emptyset$, also ist $\emptyset$ kein Unterraum.

(b) V enthält einen Unterraum $W \subset V$ mit $W \neq V$.

Angenommen $V = \{0_V\}$ und $W \subsetneq V$, dann ist $W = \emptyset$. Also ist W kein Unterraum.

$\surd$ (c) Keine der obigen Aussagen ist wahr

6. Sei V ein Vektorraum und $S \subset V$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) S ist ein Untervektorraum

Im Allgemeinen ist eine Teilmenge von einem Vektorraum kein Unterraum. Betrachte $\{(1,1)^T\} \subset \mathbb{R}^2$

(b) S ist ein Vektorraum

$\surd$ (c) Der Span $\mathrm{Sp}(S)$ ist ein Untervektorraum

$\surd$ (d) Der Span $\mathrm{Sp}(S)$ ist ein Vektorraum

7. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

$\surd$ (a) Jeder Körper hat mindestens zwei verschiedene Elemente.

1_K und 0_K.

(b) Jeder Vektorraum hat mindestens zwei verschiedene Elemente.

Betrachte $\{0_V\}$.

(c) Jeder Vektorraum hat mindestens zwei Unterräume.

Siehe Aufgabe 5.