D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2020

Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 7: Aufgaben

Einsendeschluss: Dienstag, der 10.11.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Welche der folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig?

√ (a) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$

Sei

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Angenommen v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear abhängig, d.h. es existieren $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ nicht alle 0 mit

$$0_{\mathbb{R}^4} = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = \begin{pmatrix}\alpha + \delta\\ \beta + \gamma\\ \beta - \gamma\\ \alpha - \delta\end{pmatrix}$$

Dann sind $-\delta = \alpha = \delta$ und $-\gamma = \beta = \gamma$, also $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Widerspruch!

(b) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$

Jede Teilmenge, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

(c) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Dann ist $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$. Also ist $0 = v_1 + v_2 + v_3 - v_4$ eine nicht-triviale Linearkombination.

(d) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Dann ist $v_4 = v_1 - v_2 + v_3$ und folglich ist die Menge linear abhängig.

(e) Keine der Mengen ist linear unabhängig.

2. Sei V ein Vektorraum über einen Körper K. Sei $S_1 \subseteq V$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Falls S linear abhängig ist, so ist jeder Vektor $v \in S$ eine Linearkombination von Vektoren in $S \setminus \{v\}$.

Sei $V \neq \{0_V\}$ und $v \in V \setminus \{0_V\}$. Dann ist $\{0_V, v\}$ linear abhängig, aber $v \neq \alpha 0_V$ für alle $\alpha \in K$.

(b) Sei S linear abhängig und $T \subseteq S$. Dann ist T linear abhängig.

Sei $V \neq \{0_V\}$ und $v \in V \setminus \{0_V\}$. Dann ist $S := \{0_V, v\}$ linear abhängig aber

$$T := \{v\} \subseteq S$$

linear unabhängig.

√ (c) Sei S linear unabhängig und $T \subseteq S$. Dann ist T linear unabhängig.

Jede Linearkombination von Elementen in T ist auch eine Linearkombination von Elementen in S. Falls T linear abhängig ist, dann ist also auch S linear anhängig.

(d) Sei $S_2 \subseteq V$ mit $\mathrm{Sp}(S_2) \subseteq \mathrm{Sp}(S_1)$, dann gilt $|S_2| \leq |S_1|$.

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, $1 < |V|$, und sei $v \in V \setminus \{0_V\}$. Seien $S_1 := \{v\}$, $S_2 := \{v, 2v\}$. Dann ist $\mathrm{Sp}(S_2) = \mathrm{Sp}(S_1)$ aber $|S_1| < |S_2|$.

√ (e) Sei $\dim V < \infty$ und sei S_1 linear unabhängig. Sei weiter $S_2 \subseteq V$ mit $\mathrm{Sp}(S_2) = V$, dann gilt $|S_1| \leq |S_2|$.

Da $\mathrm{Sp}(S_2) = V$ ist, enthält S_2 gemäss Lemma 2.79 eine Basis von V, insbesondere ist also $\dim V \leq |S_2|$. Da S_1 linear unabhängig ist, existiert nach Lemma 2.84 eine Teilmenge $S_3 \subseteq V$ so dass $S_1 \cup S_3$ eine Basis von V. Es folgt

$$|S_1| \leq |S_1 \cup S_3| = \dim V \leq |S_2|$$

und folglich $|S_1| \leq |S_2|$.

(f) Keine der Aussagen ist richtig.

3. Sei V ein Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren. Sei $v_3 \in V$ ein dritter Vektor. Welche Aussage ist im Allgemeinen wahr?

(a) Falls v_1, v_3 linear unabhängig sind und v_2, v_3 linear unabhängig sind, so sind auch v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

$\surd$ (b) Falls v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, so sind auch v_1, v_3 linear unabhängig.

(c) Falls $v_3 \neq 0$ ist, dann sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

(d) Keine der oberen.

(b) ist richtig, denn eine nicht-triviale Linearkombination von v_1 und v_3 ist auch eine nicht-triviale Linearkombination von v_1, v_2, v_3. Dagegen sind (a) und (c) falsch, zum Beispiel für $V = K^2$ und $v_1 = (1, 0)$ und $v_2 = (0, 1)$ und $v_3 = (1, 1)$.

4. Jeder Vektorraum hat eine endliche Basis.

(a) richtig

√ (b) falsch

Es gibt hierzu viele Beispiele, Sie haben zum Beispiel in der VL den Raum der Folgen mit endlichem Träger W_∞ gesehen, siehe Beispiel 2.23. Sie können probieren zu zeigen, dass dieser keine endliche Basis hat.
Hier geben wir ein anderes Beispiel, das insbesondere in der Analysis relevant ist. Sei $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und Wertebereich $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte $f_n \in V$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und betrachte $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n\} \subseteq V$. Wir behaupten, dass S linear unabhängig ist.
Seien dazu $v_1, \dots, v_k \in S$ paarweise verschieden, dann existieren paarweise verschiedene $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ so, dass $v_i = f_{n_i}$. Seien nun $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k = 0_V$. Dann ist für alle $1 \leq i \leq k$

$$0 = (\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k)(n_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{n_j}(n_i) = \alpha_i$$

und folglich sind $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig. Da $v_1, \dots, v_k$ beliebig waren, ist jede endliche Teilmenge von S linear unabhängig und somit ist S linear unabhängig.
Sei nun $W := \mathrm{Sp}(S) \subseteq V$. Wir behaupten, dass W keine endliche Basis hat. Angenommen W habe eine endliche Basis, also $\dim W = m < \infty$, dann enthält jede Teilmenge von W mit mehr als m Elementen eine Basis von W. Also enthält die unendliche Menge S eine Basis $\mathcal{B} := \{f_{n_1}, \dots, f_{n_m}\}$ von W mit paarweise verschiedenen $n_1, \dots, n_m$.
Sei nun $n := n_1 + \cdots + n_m$, dann ist $n \neq n_i$ für alle $1 \leq i \leq m$. Es gilt $f_n \in S \subseteq W = \mathrm{Sp}(S)$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis von W ist, existieren also $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ mit

$$f_n = \alpha_1 f_{n_1} + \cdots + \alpha_m f_{n_m}$$

und insbesondere

$$0_V = \alpha_1 f_{n_1} + \cdots + \alpha_m f_{n_m} - f_n$$

Folglich ist $\mathcal{B} \cup \{f_n\}$ nicht linear unabhängig. Dies ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von S.