MC-Fragen Serie 7: Repetition

Einsendeschluss: Dienstag, der 10.11.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Sei V ein Vektorraum und sei $S \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von V. Dann gilt immer:

√ (a) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Vektoren aus S.

(b) Jedes $v \in V$ ist eine eindeutige Linearkombination von Vektoren aus S.

(c) S ist ein Unterraum von V.

(d) $S = V$

√ (e) $\mathrm{Sp}(S) = V$

(a) ist äquivalent zur Definition eines Erzeugendensystems. Die Eindeutigkeit ist nur für linear unabhängige Erzeugendensysteme gegeben.

2. Sei V ein Vektorraum und sei $\mathcal{B} \subseteq V$ eine Basis von V. Dann gilt immer:

√ (a) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B}$.

√ (b) Jedes $v \in V$ ist eine eindeutige Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B}$.

(c) $\mathcal{B}$ ist ein Unterraum von V.

(d) $\mathcal{B} = V$

√ (e) $\mathrm{Sp}(\mathcal{B}) = V$

Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. (a) ist äquivalent zur Definition eines Erzeugendensystems. Die Eindeutigkeit in (b) ist für linear unabhängige Erzeugendensysteme gegeben, also für eine Basis.

3. Jede Teilmenge $S \subseteq V$ eines Vektorraums V über einem Körper K, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

√ (a) richtig

(b) falsch

Sei $\alpha \in K \setminus \{0\}$, dann ist

$$0_V = \alpha 0_V$$

und somit ist S linear abhängig.

4. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

(b) Der Nullvektor ist nie Teil einer Basis.

(c) Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

$\surd$ (d) Jeder Vektorraum besitzt mindestens zwei verschiedene Basen.

Der Nullvektorraum besitzt nur eine Basis, nämlich $\emptyset$. Aber auch der Vektorraum $\mathbb{F}_2$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$ besitzt nur eine Basis, nämlich $\{\bar{1}\}$.

5. Betrachte $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche Teilmenge ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum?

(a) $\emptyset$

(b) $\mathbb{Z}$

(c) $\mathbb{Q}$

$\surd$ (d) Keine der oberen

Jeder Untervektorraum ist nicht-leer, also fällt (a) weg. Jeder Untervektorraum ist aber auch unter der Skalarmultiplikation mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ abgeschlossen, was (b) und (c) beide nicht erfüllen.