MC-Fragen Serie 8: Aufgaben

Einsendeschluss: Dienstag, der 17.11.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Welche der folgenden Aussagen für eine Matrix A sind richtig?

(a) $\text{Zeilenraum}(A) = \text{Spaltenraum}(A)$

√ (b) $\dim \text{Zeilenraum}(A) = \dim \text{Spaltenraum}(A)$

√ (c) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$

Dies folgt aus der vorherigen Aussage.

(d) Keine der oberen Aussagen

2. Sei $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sei $U = \left\{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) | A = A^T \right\}$ ein UVR von V.
Was ist $\dim(U)$?

(a) $n \cdot n$

(b) $\frac{n \cdot n}{2}$

√ (c) $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

(d) $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

U ist der Raum der symmetrischen Matrizen, d.h. der obere Teil einer Matrix $A = (a_{ij}) \in U$ ist gleich dem unteren gespiegelt an der Hauptdiagonale. Die Hauptdiagonale ist dabei die Diagonale der Matrix mit den Einträgen a_{ii} für $i \in \{1, \dots, n\}$. Also bestimmen die $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Elemente von A unterhalb (oder oberhalb) der Hauptdiagonale plus die n Elemente auf der Hauptdiagonale eine symmetrische Matrix. Das sind genau $n + \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ Elemente. Daher ist die Dimension von U gleich $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

3. Sei $V=\mathbb{R}^3$, $U_1=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $U_2=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Was ist $\dim(U_1\cap U_2)$?

(a) 0

√ (b) 1

(c) 2

(d) 3

Wegen $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in U_1\cap U_2$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\in U_1,\notin U_2$ gilt

$$\left.\begin{matrix}U_1\cap U_2\neq\emptyset\\ U_1\neq U_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow \dim(U_1\cap U_2)=1.$$

4. Welche Untervektorräume U_1, U_2 des angegebenen Vektorraums V bilden eine direkte Summe $U_1\oplus U_2=V$?

(a) $V=\mathbb{P}_4[\mathbb{R}]$, $U_1=\mathrm{Sp}(x,x^2,x^2+x)$, $U_2=\mathrm{Sp}(x^4,x^4+x^3)$.

Es gilt $U_1+U_2\neq V$.

(b) $V=\mathbb{R}^3$, $U_1=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $U_2=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Es gilt $U_1\cap U_2\neq\{0_V\}$.

√ (c) $V=M_{2\times2}(\mathbb{R})$, $U_1=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\right)$,
$U_2=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$.

$\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ und
$\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right),\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\Bigg)=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right)$.

Also gilt $U_1\cap U_2=\{0_V\}$.
Zusätzlich bilden $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ eine Basis von $V=\mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

5. Die Aussage: „Falls U_1, U_2, W Untervektorräume von V sind, so dass

$$U_1 + W = U_2 + W,$$

dann gilt $U_1 = U_2$." ist

(a) wahr

√ (b) falsch

Gegenbeispiel:

$$V = \mathbb{R}^3, W = \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right), U_1 = \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right), U_2 = \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Es gilt $U_1 + W = V = U_2 + W$, aber $U_1 \neq U_2$.