D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2020

Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 9: Aufgaben

Einsendeschluss: Dienstag, der 24.11.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Welche der folgenden Abbildungen sind Vektorraumisomorphismen?

(a) $T\colon \mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}[x]_4, T(p(x)) = (x+1)\cdot p'(x)$

√ (b) $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z, z+x)$

(c) $c\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$, wobei $\mathbb{C}$ hier als $\mathbb{C}$-Vektorraum zu betrachten ist.

√ (d) $c\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$, wobei $\mathbb{C}$ hier als $\mathbb{R}$-Vektorraum zu betrachten ist.

a) T ist nicht injektiv, da für alle konstanten Polynome $p(x) = c \in \mathbb{R}$ gilt: $(x+1)\cdot p'(x) = 0$

b) Prüfe Linearität, $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$ und $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}^3$.

c) ist nicht linear da: $i \cdot c(i) = i(-i) = 1 \neq -1 = c(i^2)$.

d) Bijektivität ist schnell geprüft, also bleibt noch die Linearität: Seien dafür $\lambda, x, y \in \mathbb{R}, z, z' \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$c(\lambda(x+iy)) = \overline{\lambda(x+iy)} = \lambda(x-iy) = \lambda\overline{(x+iy)} = \lambda c(x+iy),$$

wobei wir in der zweiten Gleichheit $\lambda \in \mathbb{R}$ benutzt haben, und

$$c(z+z') = \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} = c(z) + c(z').$$

Also ist c linear.

2. Für eine Primzahl p, was ist die Kardinalität von $\mathrm{End}(\mathbb{F}_p^l)$?

(a) $(pl)^{pl}$

(b) $(p^l)^2$

(c) $(p^l)^{p^l}$

√ (d) $p^{(l^2)}$

Laut Beispiel 3.17 aus dem Skirpt ist $|\mathrm{End}(\mathbb{F}_p^l)| = (p^l)^l = p^{l^2}$.

3. Sei V ein beliebiger Vektorraum. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Sei $V' \subseteq V$ ein Untervektorraum. Jeder Automorphismus $f\colon V' \to V'$ kann zu einem Automorphismus $\overline{f}\colon V \to V$ fortgesetzt werden, d.h. für jeden Automorphismus $f\colon V' \to V$ gibt es einen Automorphismus $\overline{f}\colon V \to V$, sodass für die Einschränkung von $\overline{f}$ auf V' gilt: $\overline{f}|_{V'} = f$.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Diese Aussage ist richtig. Wähle ein Komplement von V', das heisst, einen Untervektorraum V'' von V mit $V = V' \oplus V''$. Dann ist die Abbildung

$$V' \times V'' \to V,\ (v', v'') \mapsto v' + v''$$

bijektiv. Definiere eine Abbildung $\bar{f}\colon V \to V$ durch $\bar{f}(v' + v'') := f(v') + v''$ für alle $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Da f linear ist, zeigt eine direkte Rechnung, dass auch $\bar{f}$ linear ist. Wir behaupten, dass $\bar{f}$ bijektiv ist.

Seien dafür zunächst $v' \in V'$ und $v'' \in V''$ mit $f(v') + v'' = 0$. Dann ist $f(v') = -v'' \in V' \cap V'' = \{0\}$ und somit $f(v') = v'' = 0$. Wegen der Injektivität von f ist dann auch $v' = 0$. Also ist $\mathrm{Kern}(\bar{f}) = \{0\}$ und somit $\bar{f}$ injektiv.

Sei andererseits $v \in V$ beliebig. Schreibe $v = v' + v''$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Dann ist $v' = f(f^{-1}(v'))$ und somit $v = f(f^{-1}(v')) + v'' = \bar{f}(f^{-1}(v') + v'')$. Also ist $\bar{f}$ surjektiv.

Insgesamt ist $\bar{f}$ bijektiv und daher ein Isomorphismus $V \to V$, also ein Automorphismus von V.

4. Sei V ein beliebiger Vektorraum. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ gilt $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)$.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Diese Aussage ist falsch. Betrachte zum Beispiel den durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegebenen Endomorphismus $m_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\mathrm{Ker}(m_A) = \mathrm{Sp}((1,0)^T) = \mathrm{Bild}(m_A).$$

Die zwei Untervektorräume haben weder den Durchschnitt $\{0\}$, noch erzeugen sie zusammen $\mathbb{R}^2$, daher bilden sie keine direkte Summe $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)$.

5. Es existiert eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$$

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Das ist richtig, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und wir können laut Satz 3.15 die Bilder dieser Basisvektoren beliebig wählen. Ganz explizit könnten wir

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + 3y$$

definieren.

6. Es existiert eine Abbildung $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4.$$

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Sicher existiert so eine Abbildung, sie kann aber nicht linear sein, siehe nächste Aufgabe.

7. Es existiert eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4.$$

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Das ist falsch, denn aus der Linearität würde

$$2 + 3 = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4.$$

folgen, ein Widerspruch.

8. Sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4, \quad T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 5.$$

Kann man

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bestimmen?

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Das ist wahr, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und laut Satz 3.15 bestimmt eine Wahl von Bildern von Basisvektoren eine eindeutige lineare Abbildung. Ganz explizit gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und somit

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 = 7.$$

9. Sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4.$$

Kann man daraus den Wert von

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bestimmen?

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Das ist falsch, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und nach Satz 3.15 bekommt man durch jede beliebige Wahl eines Bildes von $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung.