D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2020

Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 9: Repetition

Einsendeschluss: Dienstag, der 24.11.2020 um 10:00 Uhr

---

1. Sei $T: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V und W über dem Körper K. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

√ (a) $\forall v, v' \in V$ und $\forall a \in K$ gilt: $T(av + v') = aT(v) + T(v')$

√ (b) Es gilt $T(0) = 0$.

√ (c) Für linear abhängige Vektoren $v_1, ..., v_n \in V$ sind auch die Bilder $T(v_1), ..., T(v_n)$ linear abhängig.

(d) Es gilt: $\dim(V) = \dim(W)$.

a) folgt direkt aus der Definition. b) folgt aus $T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$. Für c) seien $a_1, ..., a_n \in K$ nicht alle 0, so dass $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$. Dann folgt durch Linearität: $0 = T(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = \sum_{i=1}^n a_i T(v_i)$, also sind $T(v_1), ..., T(v_n)$ linear abhängig. Für d) benutze zum Beispiel die Nullabbildung zwischen zwei Vektorraümen mit unterschiedlicher Dimension.

2. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

√ (a) $id: V \to V, v \mapsto v$, für einen Vektorraum V über einem Körper K

(b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y, 1 + z)$

(c) $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (xy, z)$

√ (d) $h: \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3, p(x) \mapsto p'(x)$

a) folgt direkt aus der Definition. b) f erfüllt nicht $f(0) = 0$, also kann f nicht linear sein (vgl. Frage 1). Für c) berechne:

$$g(\lambda(x, y, z)) = (\lambda^2 xy, \lambda z) = \lambda(\lambda xy, z) \neq \lambda(xy, z)$$

für $\lambda \neq 1$. Die Linearität in (d) folt aus den Ableitungsregeln.

3. Für jeden Vektorraum V ist $|\operatorname{End}(V)| \geq 2$.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Diese Aussage ist falsch für $V = \{0\}$. Falls $V \neq \{0\}$ ist, ist die Aussage wahr, denn dann sind die Identitätsabbildung Id_V und die Nullabbildung in $\operatorname{End}(V)$ enthalten.

4. Die Abbildung $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ ist linear.

(a) Wahr

$\surd$ (b) Falsch

Das ist falsch, denn f ist genau dann linear, wenn $b = 0$.

5. Für jede lineare Abbildung $T \colon K^n_{Spal} \to K^m_{Spal}$ existiert eine Matrix

$$A \in M_{m \times n}(K),$$

sodass $Tx = Ax$ gilt für alle $x \in K^n$.

$\surd$ (a) Wahr

(b) Falsch

Das ist Lemma 3.18 im Skript.

6. Sei $V = \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_n)$ und $T \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Sp}(Tv_1, \ldots, Tv_n)$.

$\surd$ (a) Wahr

(b) Falsch

Das ist Lemma 3.26 im Skript.

7. Sei $T \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V und W über dem Körper K. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

$\surd$ (a) $\mathrm{Ker}(T) = \{0\} \iff T$ ist injektiv.

$\surd$ (b) $\mathrm{Ker}(T)$ ist ein Untervektorraum von V.

(c) Falls $V = W$ ist, so gilt $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$.

(a) und (b) wurden in der Vorlesung gezeigt. Für (c) betrachten wir beispielsweise $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (0, x, y)$. Dann gilt

$$\mathrm{Im}(T) = \{(0, a, b) \in \mathbb{R}^3 \colon a, b \in \mathbb{R}\}$$

und

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(0, 0, a) \in \mathbb{R}^3 \colon a \in \mathbb{R}\}.$$