Übungsserie 1

Abgabe bis zum 30. September

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Welche der folgenden Abbildungen sind surjektiv, welche sind injektiv? Begründen Sie in ganzen Sätzen warum. In der Mathematik ist es wichtig, dem Leser zu helfen, den Lösungsweg einfach lesbar zu präsentieren. Wir geben ein Beispiel an:

Sei $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ die Abbildung gegeben durch $n \longmapsto 2n - 1$.

Lösung. Die Abbildung f_1 ist injektiv: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit gleichem Bild unter f_1, also $2n - 1 = 2m - 1$. Daraus folgt $2(n - m) = 0$. Wir folgern, dass $n - m = 0$, also $n = m$ sein muss.

Die Abbildung f_1 ist nicht surjektiv: Die Zahl $2n$ ist immer eine gerade Zahl und darum $2n - 1$ immer eine ungerade Zahl. Darum liegt zum Beispiel die Zahl 2 nicht im Bild von f_1. $\square$

Untersuchen Sie nun die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

(a) $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, wobei $n \longmapsto \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, und $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet.

(b) $f_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, wobei $(n, m) \longmapsto 2^{n-1}(2m - 1)$.

(c) $f_4 : \mathbb{N}_{\geq 2} := \{2, 3, 4, 5, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{N}$, wobei

$$f_4(n) = \text{die grösste Zahl, welche ein Teiler von } n \text{ ist, und} < n \text{ ist.}$$

(d) (Knobelaufgabe) $f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_{\geq 3}$, wobei

$$f_5(n) = \text{die Anzahl Buchstaben, welche die Zahl } n \text{ in Deutsch beschreibt.}$$

Also $f_5(11) = 3$, weil 11 als *Elf* geschrieben wird und 3 Buchstaben hat. Ein Wortabstand zählt als 0.

Aufgabe 2. Sei X eine endliche Menge mit n Elementen, und sei Y eine endliche Menge mit m Elementen.

(a) Wie viele Abbildungen von X nach Y gibt es?

(b) Wie viele injektive Abbildungen von X nach Y gibt es?

(c) Wie viele bijektive Abbildungen von X nach Y gibt es?

Aufgabe 3. Zeigen Sie die Distributivgesetze:

(a) (in der Prädikatenlogik) Seien A, B, C Aussagen. Zeigen Sie

$$(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \qquad \text{und} \qquad (A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C).$$

(b) (in der Mengenlehre) Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad \text{und} \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie die Gesetze von De Morgan:

(a) (in der Prädikatenlogik) Seien A, B, C Aussagen. Zeigen Sie

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B \qquad \text{und} \qquad \neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B.$$

(b) (in der Mengenlehre) Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad \text{und} \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Aufgabe* 5. Sei X eine endliche Menge mit n Elementen, und sei Y eine endliche Menge mit m Elementen. Wie viele surjektive Abbildungen von X nach Y gibt es? Die korrekte Antwort lautet: 0 falls $n < m$, und

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

falls $n \geq m$. Hier steht $\binom{m}{k}$ für den Binomialkoeffizienten $\frac{m!}{k!(m-k)!}$. Googlen Sie *Stirling number of the second kind.*

Aufgabe* 6. Sei X eine Menge. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X, \; A \longmapsto \mathbb{1}_A,$$

die einer Teilmenge $A \subset X$ deren charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ zuordnet. Zeigen Sie auf die folgenden beiden Arten, dass Φ bijektiv ist:

(a) indem Sie direkt verifizieren, dass Φ injektiv und surjektiv ist.

(b) indem Sie explizit eine Umkehrabbildung angeben.

Angenommen die Menge X sei endlich, mit n Elementen. Wie viele Elemente hat die Potenzmenge X? Wie viele Elemente hat die Menge $\{0,1\}^X$?