Übungsserie 10

Abgabe bis zum 2. Dezember

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ genau dann eine Cauchy-Folge ist falls beide $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ sind.
Folgern Sie aus dem entsprechenden Satz für reelle Cauchy-Folgen, dass eine Folge in $\mathbb{C}$ genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 2. Sei $\log(t) = \int_1^t \frac{1}{x}\,dx$ der natürliche Logarithmus von $t > 0$. Wir haben in der Vorlesung gesehen dass $\log(ts) = \log(t) + \log(s)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

(a) Zeigen Sie die Abschätzung $\log(n) \geq \sum_{k=2}^n 1/k$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\log : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende unbeschränkte Funktion ist.

(c) Zeigen Sie die Abschätzung $\log(1+t) \leq t$ für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

Aufgabe 3. Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen komplexer Zahlen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(\tfrac{n+1}{n})$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\tfrac{1}{n^2}\right)$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen reeller Zahlen konvergieren, und berechnen Sie die Grenzwerte.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$

Hinweis: Faktorisieren Sie den Nenner in zwei quatratische Terme.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $|x| \leq \frac{1}{2}$. Betrachten Sie die Folge $\sum_{n=0}^{\infty} x^n F_n$, wobei F_n für die n-te Fibonacci Zahl steht, also $F_0 = 0, F_1 = 1$ und rekursiv $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

Hinweis: Für die Konvergenz der Reihe zeigen Sie, dass $F_n \leq \phi^n$ gilt, wobei $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der *goldene Schnitt* ist.

Aufgabe 5. Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. Sei

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \text{ die Ziffer 9 kommt nicht in der Dezimaldarstellung von } n \text{ vor}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ konvergiert.

Hinweis: Definieren Sie die Mengen $A_m = A \cap [10^{m-1}, 10^m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und schätzen Sie $\sum_{n \in A_m} \frac{1}{n}$ für jedes m ab.

Aufgabe 6. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die *Maschenweite* einer Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ist gegeben durch $\max\{\Delta x_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$, wobei $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ist. Das *Stetigkeitsmodul* der Funktion f ist definiert als

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \,\big|\, x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta\}$$

für jedes $\delta > 0$. Zeigen Sie, das für Zerlegungen mit Maschenweite höchstens δ die folgende Annäherung für das Integral gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i \right| \leq \omega_f(\delta)(b - a)$$

wobei $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ eine beliebige Wahl ist.

Aufgabe 7. Sei $a \in (0, 1)$. Eine *Dezimaldarstellung* der Zahl a ist eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = a$$

gilt.

Zeigen Sie, dass die Dezimaldarstellung genau dann nicht eindeutig ist, falls $10^N a \in \mathbb{N}$ für mindestens ein $N \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie, dass es in diesem Fall genau 2 Dezimaldarstellungen der Zahl a gibt.