Übungsserie 11

Abgabe bis zum 9. Dezember

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Wir definieren

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) = \lim_{k\to\infty}\prod_{n=0}^{k}(1+a_n)$$

im gleichen Sinn wie auch Reihen. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) \text{ konvergiert.}$$

Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass $\frac{t}{2} \leq \log(1+t)$ für alle $t \in [0,1]$ gilt und kombinieren Sie diese Abschätzung mit der aus Aufgabe 2c, Serie 10.

Aufgabe 2. (a) (Verdichtungskriterium) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen, und so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$$

gilt.

(c) Sei $s > 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(d) Zeigen Sie, dass folgende Reihe divergiert:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}.$$

Aufgabe 3. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Benutzen Sie das Cauchy-Produkt von Reihen und die geometrische Reihe, um $\frac{1}{(1-x)^4}$ als Potenzreihe darzustellen.

Aufgabe 4. Sei $\theta = \frac{2\pi}{5}$. Zeigen Sie: $\sin(\theta) = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.
Hinweis: Schreiben Sie $z = \exp(i\theta)$ als Nullstelle eines Polynoms kleinsten Grades.

Aufgabe 5. Berechnen Sie ohne Maschinenhilfe die reelle Zahl

$$\sin(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

bis auf drei dezimale Nachkommastellen genau. Begründen Sie im Detail, warum Ihre Rechnung funktioniert.

Aufgabe 6. Sei $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ die komplexe Exponentialfunktion definiert als die Potenzreihe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(a) Bestimmen Sie das Bild von exp.
(b) Sei $c \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass es genau eine komplexe Zahl z gibt, mit

$$-\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi \qquad \text{und} \qquad \exp(z) = c.$$

Die Funktion $\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ die $c \in \mathbb{C}^\times$ die in (2) eindeutige bestimmte Zahl $z \in \mathbb{C}$ zuordnet, heisst **Hauptzweig** des komplexen Logarithmus.

(3) Zeigen Sie, dass der Hauptzweig des komplexen Logarithmus nicht stetig ist, und bestimmen sie die Unstetigkeitsstellen.
(4) Erklären Sie zunächst informell, warum es keine stetige Funktion $L : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, mit $\exp(L(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times$. Anschliessend, beweisen Sie diese Aussage.