Übungsserie 12

Abgabe bis zum 16. Dezember

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (ohne l'Hopital zu benutzen).

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x-2}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{2e^{2x} - 1}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a}$$

Wählen Sie dabei in jedem Fall einen geeigneten Definitionsbereich, auf dem die angegebene Formel eine Funktion definiert.

Aufgabe 2. Sei $p \in \mathbb{R}[T]$ ein Polynom, $p(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0$.

(a) Zeigen Sie, dass es für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ein eindeutiges Polynom $q_{x_0} \in \mathbb{R}[T]$ gibt, so dass

$$q_{x_0}(T)(T - x_0) = p(T) - p(x_0)$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $q_{x_0}(x_0)$ die Ableitung $p'(x_0)$ ist.

Definieren Sie die Ableitung $D\colon k[T] \longrightarrow k[T]$ für beliebige Körper k als die lineare Abbildung die 1 auf 0 und T^n auf nT^{n-1} für $n \in \mathbb{N}$ abbildet.

(c) Beweisen Sie die Produktregel: $D(pq) = D(p)q + pD(q)$ für $p, q \in k[T]$.

(d) Was ist der Kern von D?

(e) Finden Sie einen Körper k und ein Polynom $p \in k[T]$, so dass $p(x) = 0$ für alle $x \in k$, aber $D(p) \neq 0$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

(a) $f_1(x) = \sqrt{1 + x^2}$

(b) $f_2(x) = \cos(\cos x)$

(c) $f_3(x) = \exp\left(\frac{1}{1+x^4}\right)$

(d) $f_4(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

(e) $f_5(x) = x^{\sin x}$ (definiert nur für $x > 0$)

(f) $f_6(x) = \frac{(x^2 \cos x + 2)^2}{\log(2 + x^2) + x^6}$

Aufgabe 4. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.99 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $x = y = 1$. Was passiert mit der Lösung wenn man 0.99 in der Matrix linkerhand durch 1.001 ersetzt. Formulieren Sie Ihre Beobachtung in dem Sie den Begriff des uneigentlichen links- und rechtsseitigen Grenzwertes benutzen. Was bedeutet das für eine Anwendung, in der die Matrixeinträge physikalische Messwerte darstellen?

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, derart, dass $f(x) = f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl c existiert, mit $f(x) = c \cdot \exp(x)$.

(b) Was passiert, falls f nur Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ anstatt $\mathbb{R}$ hat und ebenfalls $f' = f$ erfüllt?

Aufgabe 6. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$. Wenn $M \geq 0$ derart, dass $|f'(x)| \leq M|f(x)|$ für alle $x \in [0,1]$ existiert, dann zeigen Sie $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $g, h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g = f^2$ und $h(x) = \exp(-2Mx)g(x)$. Zeigen Sie, dass $h = 0$ ist und schliessen Sie dann $g = 0,\ f = 0$.