Übungsserie 13

Keine Abgabe und keine Bonuspunkte zu holen in dieser Serie.

Aufgabe 1. Berechnen Sie mit partieller Integration

(a) das unbestimmte Integral $\int x^2 \sin x \, dx$,

(b) rekursive Formeln für folgende unbestimmte Integrale

$$a_n = \int x^n \exp x \, dx, \qquad b_n = \int x^n \sin x \, dx \qquad \text{und} \qquad c_n = \int x^n \cos x \, dx$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$,

(c) die unbestimmten Integrale $\int x^a \log x \, dx$ für jedes $a \in \mathbb{R}$. Beachten Sie hierbei, dass der Fall $a = -1$ getrennt zu behandeln ist.

(d) die Integrale $\int \exp(ax) \sin(bx) \, dx$ für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden Integrale durch Substitution

(a) $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) \, dx$ mit $u = \sqrt{x}$,

(b) $\int \frac{1}{1+\exp(x)} \, dx$ mit $u = \exp(x)$,

(c) $\int x\sqrt{1-x^2} \, dx$ mit $u = 1 - x^2$,

(d) $\int \frac{1}{\sin(x)} \, dx$ mit $u = \tan \frac{x}{2}$,

(e) $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx$ mit $x = a \tan u$.

Hinweis zur Halbwinkelmethode (d): Zeigen Sie $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ und $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe von l'Hôpital's Regel.

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)}$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}$ (c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin \pi x}$

(d) $\lim_{x \to -\infty} x^3 e^x$ (e) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

Aufgabe 4. Wir definieren den **Sinus hyperbolicus** $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und den **Kosinus hyperbolicus** $\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen von sinh und cosh.

(b) Zeigen Sie, dass der Sinus hyperbolicus streng monoton wachsend und bijektiv ist. Die entsprechende inverse Funktion

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heisst **Areasinus hyperbolicus**.

(c) Zeigen Sie, dass der Kosinus hyperbolicus Bild $[1, \infty)$ hat und eingeschränkt auf $[0, \infty)$ bijektiv auf sein Bild abgebildet wird. Die entsprechende inverse Funktion

$$\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

heisst **Areakosinus hyperbolicus**.

(d) Berechnen Sie die Ableitungen von arsinh und arcosh.

(e) Verifizieren Sie folgende Identitäten:
   (i) $e^x = \sinh x + \cosh x$,
   (ii) $\sinh x = -i \sin(ix)$ und $\cosh x = \cos(ix)$
   (iii) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
   (iv) $\operatorname{arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$ und $\operatorname{arcosh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$
   (v) $\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ und $\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$

(f) Diese Aufgabe begründet den Ausdruck *Area* in der Definition des Inversen der hyperbolischen Funktionen. Skizzieren Sie folgendes: Sei $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, eine **Hyperbel**. Sei $P_1 = (x_0, y_0)$ ein Punkt in H und sei $P_2 = (x_0, -y_0)$ sowie $O = (0, 0)$ der Ursprung. Die Gerade durch die Punkte O und P_1, die Gerade durch die Punkte O und P_2, und die Hyperbel H spannen eine Fläche auf.
Zeigen Sie, dass ihr Flächeninhalt $A = \operatorname{arsinh}(x_0) = \operatorname{arcosh}(y_0)$ ist.

(g) Wenn man eine Kette an zwei Enden hochhält, entsteht eine Kurve. Diese Kurve ist **keine** Parabel sondern kann durch den Kosinus hyperbolicus beschrieben werden. Googeln Sie, formalisieren Sie und beweisen Sie diese Behauptung.

Aufgabe 5. Machen Sie sich mit folgenden Methoden vertraut, um Grenzwerte zu berechnen:

- Addition, Multiplikation, Division von Grenzwerten
- Faktorisieren
- Stetige Funktion mit Limes vertauschen
- Sandwich
- Substituieren
- l'Hôpital Regel
- Reihen
- Zurückführen auf bekannte Limits
- Konjugation: $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$
- $a^b = \exp(b \log a)$ für $a > 0$
- Rekursiv definierte monotone Folge

Lösen Sie die folgenden Aufgaben (auf möglichst verschiedene Weise):

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\arctan(\exp(n^2)-1)}{n}$

(4) $a_0 = 2, a_{n+1} = \sqrt{a_n+6}$ (5) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ (6) $\lim\limits_{x\searrow 0} \sqrt{x}\exp\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$ (8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+\sin x}$ (9) $\lim\limits_{x\searrow 0}(1+2x)^{\frac{4}{x}}$

(10) $\lim\limits_{x\searrow 0} \sin(x)^x$ (11) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (12) $\lim\limits_{x\searrow 0} \left(x^{\frac{1}{x}}+x^{-\frac{1}{x}}\right)$.

Aufgabe 6. Berechnen Sie die folgenden Integrale und kontrollieren Sie mit Wolfram Alpha.

(1) $\int_0^3 \exp(\sqrt{x+1})dx$ (2) $\int_0^{\pi/3} \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)+\tan^2(x)}dx$ (3) $\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)dx$

(4) $\int_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$ (5) $\int_0^1 \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}+1}dx$ (6) $\int_0^1 \dfrac{dx}{(x^2+1)^3}$

(7) $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}dx$ (8) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(2x)dx$ (9) $\int_2^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

(10) $\int_4^5 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-3x}}$ (11) $\int_0^{\pi/4} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$ (12) $\int_0^1 \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$

(13) $\int_7^{26} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x}dx$ (14) $\int_0^{\pi/3} \cos^5(x)\sin(x)dx$ (15) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \dfrac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx$

(16) $\int_2^3 \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$ (17) $\int_0^1 \dfrac{dx}{2\cosh(x)+\sinh(x)+1}$ (18) $\int_1^2 \dfrac{x^2\log(x)}{(x^3+1)^3}dx$

(19) $\int_0^1 x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}dx$ (20) $\int_0^{1/2} \dfrac{dx}{(x^3-1)^2}$ (21) $\int_0^{\pi/4} \dfrac{x}{\cos^2(x)}dx$

(22) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}dx$ (23) $\int_2^3 \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}dx$ (24) $\int_1^2 (x^2+1)\log(x)dx$

(25) $\int_0^{1/2} (\arcsin(x))^2dx$ (26) $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^3(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}dx$ (27) $\int_1^2 \log^2(x)dx$

(28) $\int_0^1 \dfrac{x^2}{x^3+1}dx$ (29) $\int_0^1 \dfrac{x^3+1}{x^2+1}dx$ (30) $\int_0^1 \dfrac{x^5+x^3+x}{x^4+1}dx$

(31) $\int_0^1 \dfrac{x^5}{(x+1)(x^3+1)}dx$ (32) $\int_0^1 \dfrac{x^3(1-x^2)}{(1+x^2)^3}dx$ (33) $\int_1^2 \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

(34) $\int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}}$ (35) $\int_0^1 \frac{\cosh(x)}{e^x+1}dx$ (36) $\int_0^1 \arctan(x)dx$

(37) $\int_0^{\pi/2} \sin^4(x)dx$ (38) $\int_0^{\pi/2} \sin^5(x)dx$ (39) $\int_0^{\pi/2} x^2\sin^2(x)dx$

(40) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx$ (41) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}dx$ (42) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos(x)}$

(43) $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{1+\sin^2(x)}dx$ (44) $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}dx$ (45) $\int_1^e \sin(\log(x))dx$

(46) $\int_1^2 \frac{\log(x)}{(1+x)^2}dx$ (47) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$ (48) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

(49) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}dx$ (50) $\int_0^1 \sqrt{x^3+x^4}dx$