

Übungsserie 2

Abgabe bis zum 07. Oktober

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. (a) Sei A eine Menge. Weiter sei $g : A \rightarrow A$ eine Abbildung und $a \in A$ ein fixiertes Element. Wir können daraus eine andere Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ durch $f(1) = a$ und $f(n+1) = g(f(n))$ bilden. Wir sagen, f ist rekursiv definiert. Zeigen Sie, dass dies eine eindeutige Abbildungsvorschrift $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ definiert.

Hinweise auf Seite 85 im Skript.

- (b) Sei $f(1) = 3$ und $f(n+1) = \sqrt{5f(n)+6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f(n) < 6$ und dass $f(n) < f(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (c) Sei $f(n+1) = g(f(n))$ rekursiv definiert durch

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 3n+1, & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Beginnen Sie mit ein paar verschiedenen Startwerten für $f(1)$ und schreiben Sie die ersten Terme auf $f(1), f(2), f(3), \dots$

- Zeigen Sie: Falls die Menge $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist (also es eine Zahl $M \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f(n) \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt), dann ist die Abfolge $f(1), f(2), f(3), \dots$ periodisch ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$.
- (Knobelaufgabe: Wenn Sie diese Aufgabe lösen, werden Sie berühmt) Zeigen Sie, dass egal mit welcher Zahl $a = f(1)$ Sie starten, es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f(n) = 1$ ist.

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Betrachte die Äquivalenzrelation \sim_n auf den ganzen Zahlen \mathbb{Z} , welche für $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben ist durch

$$a \sim_n b \text{ genau dann wenn } a - b \text{ ein Vielfaches von } n \text{ ist.}$$

Sei C_n die Menge der Äquivalenzklassen.

- (a) Wie viele Elemente besitzt C_n ?
- (b) Für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ sei $[a]_n \in C_n$ die dazugehörige Äquivalenzklasse. Zeige, dass $(C_n, +)$ eine Gruppe bildet, wobei die Addition zweier Klassen $[a]_n, [b]_n \in C_n$ definiert ist als

$$[a]_n + [b]_n := [a + b]_n.$$

(c) Sei $C_n^\times = C_n \setminus \{[0]_n\}$. Ist die Multiplikation \cdot geerbt von der Multiplikation auf \mathbb{Z}

$$[a]_n \cdot [b]_n := [a \cdot b]_n$$

wohldefiniert?

(d*) Definiert (C_n^\times, \cdot) eine Gruppe? Die Existenz der multiplikativen Inversen ist nicht ganz einfach. Googlen Sie nach dem *erweiterten euklidischen Algorithmus*.

(e) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Betrachten Sie die Vorschrift $g_{n,m}^k : C_n \rightarrow C_m$ gegeben durch $[a]_n \mapsto [k \cdot a]_m$. Wann definiert diese Vorschrift eine wohldefinierte Abbildung $g_{n,m}^k$?

Aufgabe 3. Entscheiden Sie für sich, welche der folgenden Aussagen wahr sind, und welche falsch.

Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Seien A, A_1, A_2 Teilmengen von X , und B, B_1, B_2 Teilmengen von Y .

- | | |
|--|---|
| (1) $f(A_1) \cup f(A_2) = f(A_1 \cup A_2)$ | (4) $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ |
| (2) $f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$ | (5) $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ |
| (3) $f^{-1}(f(A)) = A$ | (6) $f(f^{-1}(B)) = B$ |

Welche der falschen Aussagen sind wahr, wenn man zusätzlich annimmt, dass es sich bei f um eine injektive bzw eine surjektive Funktion handelt?

Aufgabe 4. (a) Finden Sie die Symmetrien (also Spiegelungen und Rotationen) eines Quadrates. Stellen Sie alle Verknüpfungen in einer Tabelle dar. Folgern Sie, dass diese Symmetrien eine Gruppe bilden. Wir nennen Sie D_4 .

(b) Finden Sie die Symmetrien (also Spiegelungen und Rotationen) eines nicht gleichseitigen Rechteckes. Stellen Sie alle Verknüpfungen in einer Tabelle dar. (Benutzen Sie, wenn möglich ähnliche Notation wie in Teilaufgabe (a). Folgern Sie, dass diese Symmetrien eine Gruppe bilden. Wir nennen Sie D_2 .

(c) Sei S_4 die Permutationsgruppe von der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Finden Sie injektive Abbildungen $f : D_4 \rightarrow S_4$ und $g : D_2 \rightarrow S_4$, welche die Verknüpfung respektieren. Sind die Abbildungen surjektiv? Begründen Sie warum das Bild von g eine Untergruppe des Bildes von f ist.

Aufgabe* 5. Sei (K, \leq) ein angeordneter Körper und seien $x, y, z \in K$ mit $xyz > 0$. Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung gilt.

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Aufgabe* 6. Alle Elefanten sind rosarot. Beweis durch Induktion über die Anzahl der Elefanten: Für 0 Elefanten ist die Behauptung korrekt. Nehmen wir induktiv an, dass in jeder Menge die aus n Elefanten besteht, alle Elefanten rosarot sind. Sei X eine Menge mit

$n + 1$ Elefanten und nehmen wir einen Elefanten E heraus. Die restlichen n Elefanten sind alle rosarot nach der Induktionsannahme. Wir können E so wählen dass er rosarot ist: Falls er nicht rosarot wäre, ersetzen wir ihn mit einem dieser n rosaroten Elefanten. Also sind alle $n + 1$ Elefanten rosarot. Wo liegt der Fehler?