Übungsserie 3

Abgabe bis zum 14. Oktober

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Für die Aufgaben 1, 2, 3 und 5 sollen Sie ausschliesslich die Axiome (1)- (15) sowie die Folgerungen (a)-(v) des Abschnittes 2.1.1 und 2.1.2 im Skript verwenden und kenntlich auf diese verweisen. Der Sinn der Aufgaben ist alle Rechenregeln direkt aus den Axiomen hergeleitet zu haben.

Aufgabe 1. Versuchen Sie Ihren Schreibstil zu üben. Um zum Beispiel die Regel: $-0 = 0$ zu beweisen, wird etwa folgendes Argument erwartet:
Das additive Inverse -0 von 0 muss nach Definition der Inversen die Eigenschaft $(-0) + 0 = 0 + (-0) = 0$ erfüllen. Da aber die Definition des neutralen Elementes besagt, dass $0+0 = 0+0 = 0$ gilt und weil die Inverse in einer Gruppe eindeutig ist, muss $-0 = 0$ gelten.

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden weiteren Rechenregeln:

(a) $-(x + y) = (-x) + (-y)$ (wobei wir für letzteres auch $= -x - y$ schreiben),
(b) $-(x - y) = -x + y$,
(c) $(-x)(-y) = xy$.
(d) Zeigen Sie, dass das Distributivgesetz für die Subtraktion $x(y - z) = xy - xz$ gilt.

Aufgabe 2. In dieser Übung wollen wir die Existenz einer bijektiven Funktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $a \longmapsto \sqrt{a}$ mit der Eigenschaft $\sqrt{a}^2 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zeigen.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Äquivalenz $x < y \iff x^2 < y^2$ gilt.
(b) (Eindeutigkeit) Folgern Sie, dass es für jedes $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ höchstens ein $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $c^2 = a$ gibt.
(c) (Existenz) Betrachten Sie für eine reelle Zahl $a > 0$ die nicht-leeren Teilmengen

$$X = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \,|\, x^2 < a\}, \qquad \text{und} \qquad Y = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \,|\, y^2 > a\}.$$

Wenden Sie nun das Vollständigkeitsaxiom an, um ein $c \in \mathbb{R}$ mit $x \leq c \leq y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ zu finden. Verwenden Sie, dass für alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \epsilon < 1$ die Aussagen $c + \epsilon \notin X, c - \epsilon \notin Y$ gelten und schliessen Sie jeweils auf $c^2 \geq a$ beziehungsweise $c^2 \leq a$. Wir bezeichnen für jedes $a \geq 0$ die durch $c^2 = a$ und $c \geq 0$ eindeutig bestimmte reelle Zahl als $c = \sqrt{a}$ und sprechen von der Wurzel von a.
(d) (Wachsend) Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x < y$ die Ungleichung $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ gilt.
(e) (Bijektion) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bijektiv ist.

(f) (Multiplikativität) Zeigen Sie unter Verwendung von (b), dass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Gleichheit $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ gilt.

(g) (Zwei Lösungen) Zeigen Sie, dass es für $a > 0$ genau zwei Lösungen der Gleichung $x^2 = a$ in $x \in \mathbb{R}$ gibt.

Aufgabe 3. (a) Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass es keine Ordnungsrelation auf K gibt, die K zu einem angeordneten Körper machen würde.

(b) Sei K ein Körper. Angenommen es gibt ein Element $u \in K$ mit der Eigenschaft $u^2 + 1 = 0$. Zeigen Sie, dass es keine Ordnungsrelation auf K gibt die K zu einem angeordneten Körper machen würde.

Aufgabe 4. Schreiben Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen für $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(a)	$z = (2+3i)(2+i)$	(c)	$z = \frac{4+3i}{2-i}$	(e)	$z^3 = i$
(b)	$z = (2-i)^3$	(d)	$z = \frac{2-i}{4+3i}$	(f)	$z^2 + 3 + 4i = 0$

Aufgabe* 5. Sei $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit den natürlichen Rechenoperationen, wobei $\sqrt{2}$ eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass K ein angeordneter Körper ist.

(b) Sei $\mathbb{F}_{11}$ der Körper mit 11 Elementen, welcher in Aufgabe 2 in Serie 2 noch unter C_{11} beschrieben wurde. Wie viele Elemente hat der (analog zu K definierte) Körper $\mathbb{F}_{11}(\sqrt{2})$?

(c) Wie viele Elemente hat $\mathbb{F}_{17}(\sqrt{2})$?

(d) Berechnen Sie alle Quadrate in $\mathbb{F}_{11}$ und in $\mathbb{F}_{17}$. Welche Zahlen sind Quadrate? Berechnen Sie für jede Zahl $a \in \mathbb{F}_p$ ausserdem $\left[a^{\frac{p-1}{2}}\right]_p$ für $p = 11$ und $p = 17$ (Sie können das einen Computer machen lassen). Was stellen Sie fest?

Aufgabe* 6. Finden Sie einen angeordneten Körper $(K, \leq)$, der ein Element $x \in K$ enthält, mit der Eigenschaft, dass $n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Hinweis: Der Körper, den Sie suchen, darf schon einmal nicht ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ sein. Beginnen Sie also damit, zu den reellen Zahlen formell ein Element t hinzuzufügen und damit einen Körper $K = \mathbb{R}(t)$ zu definieren. Stichwort für Recherche: *rational function.* Interpretieren Sie Elemente von $\mathbb{R}(t)$ als Funktionen in der Variablen t, und nutzen Sie diese Interpretation um $\mathbb{R}(t)$ zu ordnen: Für $f, g \in \mathbb{R}(t)$ deklarieren Sie $f \geq g$ falls es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(t) \geq g(t)$ für alle $t \geq t_0$. Folgern Sie $n \leq t$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.