Übungsserie 4

Abgabe bis zum 21. Oktober

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Zeichnen Sie folgende Teilmengen der komplexen Ebene.

(a) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq |z| \leq 3\}$
(b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z^2) \geq 0\}$
(c) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| \leq 3,\ |z| \leq 3,\ |z-i| \leq 3\}$
(d) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z+1) = \mathrm{Re}(z+iz),\ |z| \leq 2\}$
(e) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, z \neq 1,\ \left|\frac{z}{z-1}\right| \leq 1\}$
(f) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| + |z+1| \leq 4\}$

Aufgabe 2. Sei $B_r(z) = \{w \in \mathbb{C} \,|\, |w-z| < r\}$ der offene Ball um $z \in \mathbb{C}$ von Radius $r > 0$.

(a) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und seien r_1, r_2 positive reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass für alle $z \in B_{r_1}(z_1) \cap B_{r_2}(z_2)$ ein $r > 0$ existiert, so dass

$$B_r(z) \subset B_{r_1}(z_1) \cap B_{r_2}(z_2)$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Teilmengen von $\mathbb{C}$ wiederum offen in $\mathbb{C}$ sind.

Aufgabe 3. Welche der folgenden Teilmengen sind offen? Welche abgeschlossen? Begründen Sie.

(a) Der Punkt $A = \{0\}$ in $\mathbb{R}$,
(b) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$,
(c) Das Intervall $C = [0, \infty)$ in $\mathbb{R}$,
(d) Das Intervall $D = (0, \infty)$ in $\mathbb{R}$,
(e) Die Menge $E = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, n > 0\right\}$ in $\mathbb{R}$,
(f) Die Menge $F = E \cup \{0\}$ in $\mathbb{R}$,
(g) Die Halbgerade $G = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in [0, \infty),\ y = 0\}$ in $\mathbb{C}$,
(h) Die Halbgerade $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in (0, \infty),\ y = 0\}$ in $\mathbb{C}$,
*(i) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, um viele andere irrationale Zahlen zu konstruieren.

Aufgabe 4. Seien $X \subset \mathbb{R}$ und $Y \subset \mathbb{R}$ nicht leere, nach oben beschränkte Teilmengen, mit der Eigenschaft $x \geq 0$ für alle $x \in X$ und $y \geq 0$ für alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass

$$XY := \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$

nach oben beschränkt ist, und dass $\sup(XY) = \sup(X)\sup(Y)$ gilt. Welche Konventionen für das Symbol ∞ brauchen Sie, falls X oder Y unbeschränkt ist?

Aufgabe* 5. Finden Sie das Infimum und Supremum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$. Besitzen sie ein Minimum, ein Maximum?

(a) $A = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{R}, 1 < a < 2, 3 < b < 4\}$,
(b) $B = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
(c) $C = \{\frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}, m + n \leq 10\}$.
(d) Sei $D = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots\right\}$.

Hinweis: Definiere $x_1 = \sqrt{2}$ und rekursiv $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, dann ist $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für das Supremum zeigen Sie per Induktion, dass $2 - x_n$ beliebig klein wird.

Aufgabe* 6. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, die offen und abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass $X = \varnothing$ oder $X = \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Nehmen Sie an, X sei nicht leer, wählen Sie $x \in X$, und studieren Sie die Menge der reellen Zahlen $r > 0$ mit der Eigenschaft $(x - r, x + r) \subset X$.

Aufgabe* 7. Für diese Aufgabe benötigen Sie einen Computer und etwas Programmierfähigkeit. Sei $c \in \mathbb{C}$ eine fixe komplexe Zahl, und sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ die Funktion die durch $f(z) = z^2 + c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gegeben ist. Wir definieren die *Iterationen* von f durch

$$f^{\circ 2} = f \circ f, \quad f^{\circ 3} = f \circ f \circ f, \quad \dots, \quad f^{\circ n} = f^{\circ(n-1)} \circ f$$

also zum Beispiel gilt $f^{\circ 2}(z) = (z^2 + c)^2 + c$ und $f^{\circ 3}(z) = ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c$ und so fort. Wir interessieren uns für die Menge

$$J_c := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N} : |f^{\circ n}(z)| \leq 2\right\}$$

Die Menge J_c heisst *Julia Menge* mit Parameter c.

(a) Fixieren Sie $c = -0.75 + 0.27015i$, und zeichnen Sie $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |f^{\circ n}(z)| \leq 2\right\}$ für $n = 1, 2, 3, 4$
(b) Durchlaufen Sie Pixel mit geeignet skalierten Koordinaten $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$ und prüfen Sie für $n = 1, 2, 3, \dots$ ob $|f^{\circ n}(x + yi)| \leq 2$ gilt. Falls das für alle $n \geq 1$ bis hin zu einer grossen Zahl N (Grössenordnung 300, stellvertretend für unendlich) gilt, so färben Sie das Pixel schwarz, ansonsten brechen Sie ab und färben das Pixel weiss. Experimentieren Sie mit anderen Parametern, oder einer anderen Funktion anstelle von f. Teilen Sie Ihre Bilder im Forum mit Ihren Mitstudenten!

Die Ausgabe für $c = -0.75 + 0.27015i$ sollte in etwa so aussehen: