# Übungsserie 5

Abgabe bis zum 28. Oktober

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

**Aufgabe 1.** (a) Zeigen Sie, dass falls $A_1, A_2, \ldots$ abzählbare unendliche Mengen sind, dass dann auch ihre Vereinigung $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ abzählbar unendlich ist.

(b) Beweisen Sie, dass der Polynomring $\mathbb{Q}[X]$ abzählbar unendlich ist.

(c) Schliessen Sie, dass die algebraischen Zahlen eine abzählbar unendliche Teilmenge $\overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{C}$ bilden.

(d) Ist das abzählbar unendlich kartesische Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots$ auch abzählbar?

**Aufgabe 2.** Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung gegeben durch $f(x) = \inf\{|x-k| \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f$ und zeigen Sie, dass $f$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

**Aufgabe 3.** Sei $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = f(2x)$ für alle $x > 0$. Zeigen Sie:

(a) $f$ ist genau dann stetig, wenn $f$ konstant ist.

(b) $f$ muss im Allgemeinen nicht konstant sein.

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert, so dass $f(x_0) = x_0$ gilt.

(b) Sei $g : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so dass $g(0) = g(2)$ gilt. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert, welches $g(x_0) = g(x_0+1)$ erfüllt.

**Aufgabe 5.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann stetig ist, wenn für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ auch $f^{-1}(U)$ offen ist.

**Aufgabe 6.** Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nicht stetig ist (die Grundeigenschaften der Funktion sin dürfen als bekannt vorausgesetzt werden).