Übungsserie 7

Abgabe bis zum 11. November

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = x^2$. Beweisen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

gilt. Benutzen Sie die Formel

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

welche Sie in Serie 0 Aufgabe 3 hergeleitet haben.

Aufgabe 2. Sei $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$. Beweisen Sie im Detail und nur mit den aus der Vorlesung bekannten Methoden, dass

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{2}{3}$$

gilt. Benutzen Sie wieder die Formel aus Aufgabe 1.

Hinweis: Benutzen Sie eine nicht lineare Zerlegung von $[0, 1]$, also nicht $x_k = \frac{k}{n}$.

Aufgabe 3. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und $\lambda > 0$ eine reelle Zahl. Sei $g : [\lambda a, \lambda b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion, welche durch $g(x) = f(\lambda^{-1}x)$ definiert wird. Zeigen Sie, dass g integrierbar ist, und dass

$$\lambda \int_a^b f(x)\, dx = \int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)\, dx$$

gilt.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Polynomfunktion

$$f(x) = (x-5)(x-3)(x-1)(x+1)(x+3) + 1.$$

Zeigen Sie, dass f genau 5 Nullstellen hat.

Aufgabe 5. Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge[1]. Ein Element $m \in X$ heisst **maximales Element**, falls aus $m \leq x$ immer $x = m$ folgt. Ein Element $M \in X$ heisst **Maximum**, falls $M \geq x$ für alle $x \in X$ gilt.

(a) Überzeugen Sie sich davon, dass ein Maximum ein maximales Element ist.
(b) Überzeugen Sie sich davon, dass X höchstens ein Maximum haben kann.

Finden Sie Beispiele für folgende Situationen, oder zeigen Sie, dass das nicht möglich ist:

(c) Die geordnete Menge X besitzt kein Maximum, und auch keine maximalen Elemente.
(d) Die geordnete Menge X besitzt maximale Elemente, aber kein Maximum.
(e) Die geordnete Menge X besitzt genau ein maximales Element, aber kein Maximum.

Aufgabe 6. (Herons Algorithmus zur Berechnung der Wurzel) Sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Wir wollen die Wurzel von a möglichst genau bestimmen. Sei dazu $x_0 > 0$ ein beliebiger Startwert und sei $x_n \in \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jede Zahl $x > 0$ liegt die Wurzel $\sqrt{a}$ zwischen x und $\frac{a}{x}$.
(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \geq \sqrt{a}$.
Hinweis: Beweisen und benutzen Sie die Ungleichung über das arithmetische und geometrische Mittel. Also für alle reellen Zahlen $c, d \geq 0$ gilt $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$.
(c) Der Fehler $e_n = |x_n - \sqrt{a}|$ der Approximation erfüllt die Rekursionsformel $e_n = \frac{e_{n-1}^2}{2x_{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(d) Berechnen Sie mit diesem Algorithmus die Wurzel von 2 bis auf fünf Nachkommastellen. Nehmen Sie an, Sie kennen den korrekten Wert von $\sqrt{2}$ nicht. Begründen Sie nur mit Teilaufgabe (c), warum die fünf Nachkommastellen richtig sind.

[1] erfüllt also Axiome (10)-(12) auf Seite 74 im Skript