Übungsserie 8

Abgabe bis zum 18. November

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$
gilt. Zeigen Sie, dass es ein $y \in [a, b]$ mit $f(y) = g(y)$ gibt.

Aufgabe 2. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $y \in [a, b]$ gibt, so dass
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(y)(b-a)$$
ist.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 3. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} (-2)^{-n} & \text{falls } 2^{-(n+1)} < x \le 2^{-n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$
Ist die Funktion f eine Treppenfunktion? Ist sie stetig oder monoton? Zeigen Sie, dass f integrierbar ist, und berechnen Sie das Integral.

Aufgabe 4. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und
$$\mathcal{U}(f) = \left\{ \int_a^b u(x)\,dx \,\middle|\, u \text{ eine Treppenfunktion und } u \le f \right\}$$
die Menge aller Untersummen von Treppenfunktionen, welche kleiner oder gleich f sind.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}(f)$ ein Intervall ist.

(b) Seien f und g beschränkte Funktionen auf $[a, b]$. Zeigen Sie die Inklusion
$$\mathcal{U}(f) + \mathcal{U}(g) \subset \mathcal{U}(f+g).$$

Selbstverständlich gelten analoge Aussagen für die Menge aller Obersummen $\mathcal{O}(f)$.

Aufgabe 5. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, so, dass

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx < \epsilon$$

gilt.

Hinweis: Approximieren Sie f zuerst durch eine Treppenfunktion und die Treppenfunktion dann durch eine stetige Funktion.

Aufgabe 6. Seien $a < b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und seien $f, g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$t \longmapsto A(t) = \int_a^b (f(x) + tg(x))^2\, dx$$

auf $\mathbb{R}$ ein Minimum $m = \min\{A(t) | t \in \mathbb{R}\}$ annimmt und dass $m \geq 0$.

(b) Berechnen Sie m und folgern Sie daraus die *Schwarz-Ungleichung*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\, dx} \sqrt{\int_a^b g(x)^2\, dx}.$$

(c) Für welche *stetigen* Funktionen f, g gilt Gleichheit?