Übungsserie 9

Abgabe bis zum 25. November

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n).$$
Insbesondere ist für $\alpha \in \mathbb{C}$ die Folge $(\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n$.

Hinweis: Folgen Sie der Beweisstrategie von Proposition 3.51, welche zeigt, dass Summen und Multiplikationen stetiger Funktionen stetig sind.

Aufgabe 2. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} nz^n = 0$ gilt.

Aufgabe 3. Definiere die Menge $A = \left\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ und sei $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Folge definiert durch $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$ bildet eine Cauchy Folge.

(ii) Die Funktion f kann zu einer gleichmässig stetigen Funktion $\widetilde{f} : A \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ erweitert werden (also $\widetilde{f}|_A = f$).

(iii) Die Funktion f ist gleichmässig stetig.

Aufgabe 4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reellwertige Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei (b_n) die Folge definiert durch $b_n = a_n^{-1}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.

(a) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Grenzwert 0 hat, dann divergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Grenzwert 0 hat, dann divergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen unendlich.

(c) Falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, dann hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Grenzwert 0.

(d) Falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen unendlich divergiert, dann hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Grenzwert 0.

Aufgabe 5. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und geben Sie den Grenzwert an. Impliziert umgekehrt die Konvergenz von $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Aufgabe 6. Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Das *Cesaro-Mittel* der Folge ist die Folge $(w_n)_{n=1}^{\infty}$, gegeben durch

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k.$$

(a) Zeigen Sie, dass falls die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann auch $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und den gleichen Grenzwert hat.

(b) Der Grenzwert des Cesaro Mittels einer Folge kann auch existieren, falls eine Folge nicht konvergiert. Berechnen Sie den Grenzwert des Cesaro Mittels der Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,-1,1,-1,1,-1,\ldots) \qquad \text{und} \qquad (z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,i,i^2,i^3,i^4,\ldots).$$