Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Peter S. Jossen 15. August 2019

Analysis I & II Prüfung

CHAB | ITET | MATH | PHYS

Allgemeine Anleitungen

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Mobiltelefone und elektronische Geräte auf Flugmodus und im Gepäck verstauen.
- Schreiben Sie ausserschliesslich mit blauen oder schwarzen Füller/Kugelschreiber. Kein Bleistift, keine Rote oder Grüne Farbe, kein Tipp-Ex.
- Schreiben Sie leserlich. Was nicht eindeutig lesbar ist, wird konsequent ignoriert.
- Zugelassene Hilfsmittel: Wörterbuch. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Prüfungsdauer: 120 Minuten (Teil A) + 120 Minuten (Teil B). Dazwischen 30 Minuten Pause. Während der Pause und nach der Prüfung bitte nicht zu laut, es werden andere Prüfungen in der näheren Umgebung geschrieben!

Formelsammlung

Notation.

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \text{ganze Zahlen}\\
\mathbb{R} &= \text{reelle Zahlen}\\
\mathbb{R}_{>0} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}\\
\log &= \text{der natürliche Logarithmus } \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Trigonometrische Formeln.

Wichtige Funktionswerte:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\alpha = 0$	0	1	0
$\alpha = \pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\alpha = \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\alpha = \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\alpha = \pi/2$	1	0	$\nexists$

Addition:

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \qquad \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b.$$

Doppelwinkel:

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a, \qquad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

Halbwinkel:

$$\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}, \qquad \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}.$$

Multiplikationsformeln:

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}, \\ \sin a \sin b &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}, \\ \sin a \cos b &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}. \end{aligned}$$

Euler'sche Formeln ($\forall z \in \mathbb{C}$):

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Nützliche Koordinatenwechsel für dreidimensionale Integrale.

Zylinderkoordinaten ($r \in (0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$):

$$(x, y, z) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z), \qquad dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Kugelkoordinaten ($r \in (0,\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi)$, $\theta \in (0,\pi)$):

$$(x,y,z) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta), \qquad dxdydz = r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Ableitung inverser trigonometrischer Funktionen

(1) $\sin'(x) = \cos(x) \qquad \cos'(x) = -\sin(x) \qquad \tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$

(2) $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Ein paar nützliche Stammfunktionen von Wurzelfunktionen: (ohne Integrationskonstante geschrieben, und ohne Angabe von Definitionsbereichen).

(1) $\displaystyle\int \sqrt{ax+b}\, dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3}\right)\sqrt{ax+b}$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx = -\sqrt{x(a-x)} - a\arctan\left(\tfrac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a}\right)$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{a+x}}\, dx = \sqrt{x(a+x)} - a\log\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}\right)$

(4) $\displaystyle\int x\sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2 + abx + 3a^2x^2)\sqrt{ax+b}$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{ax-x^2} = \frac{(4x-2a)\sqrt{ax-x^2} - a^2\arcsin\left(\frac{a-2x}{a}\right)}{8}$

(6) $\displaystyle\int \sqrt{ax+x^2} = \frac{(4x+2a)\sqrt{x^2+ax} - a^2\log\left(\left|2\sqrt{x^2+ax} + 2x + a\right|\right)}{8}$

(7) $\displaystyle\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\ dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \log\left(\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right)$

(8) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arctan\left(\tfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\ dx = \log\left(\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right)$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx = \arcsin(\tfrac{x}{a})$

(11) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\ dx = \sqrt{x^2 \pm a^2}$

(12) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx = -\sqrt{a^2 - x^2}$

(13) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\ dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2}\ \mp\ \frac{1}{2}a^2 \log\left(\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right)$

Vektorfelder.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

$$\begin{aligned}
\text{Divergenz von } F \text{ (Quellenstärke) :} \quad & \operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F_i, \\
\text{Rotation von } F\text{, im Fall } n = 2\text{:} \quad & \operatorname{rot} F = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \\
\text{Rotation von } F\text{, im Fall } n = 3\text{:} \quad & \operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sei $\psi : W \to U$ von Klasse C^2. Das zurückgezogene Vektorfeld $G = \psi^* F$ auf W ist durch

$$G_i(x) = \langle F(\psi(x)), \partial_i \psi(x) \rangle$$

gegeben.