Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Peter S. Jossen

22. Januar 2020

Analysis I & II Prüfung

CHAB | ITET | MATH | PHYS

Allgemeine Anleitungen

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Mobiltelefone und elektronische Geräte auf Flugmodus und im Gepäck verstauen.
- Schreiben Sie ausserschliesslich mit blauen oder schwarzen Füller/Kugelschreiber. Kein Bleistift, keine rote oder grüne Farbe, kein Tipp-Ex.
- Schreiben Sie leserlich. Was nicht eindeutig lesbar ist, wird konsequent ignoriert.
- Zugelassene Hilfsmittel: Wörterbuch. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Prüfungsdauer: 150 Minuten (Teil A) + 90 Minuten (Teil B). Dazwischen 30 Minuten Pause. Während der Pause und nach der Prüfung bitte nicht zu laut, es werden andere Prüfungen in der näheren Umgebung geschrieben!

Formelsammlung

Notation.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \text{ganze Zahlen} \\
\mathbb{R} &= \text{reelle Zahlen} \\
\mathbb{R}_{>0} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \\
\log &= \text{der natürliche Logarithmus } \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Trigonometrische Formeln.

Wichtige Funktionswerte:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\alpha = 0$	0	1	0
$\alpha = \pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\alpha = \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\alpha = \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\alpha = \pi/2$	1	0	$\nexists$

Addition:

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \qquad \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b.$$

Doppelwinkel:

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a, \qquad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

Halbwinkel:

$$\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos a}{2}, \qquad \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos a}{2}.$$

Multiplikationsformeln:

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2},\\
\sin a \sin b &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2},\\
\sin a \cos b &= \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}.
\end{aligned}$$

Euler'sche Formeln ($\forall z \in \mathbb{C}$):

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Nützliche Koordinatenwechsel für dreidimensionale Integrale.

Zylinderkoordinaten ($r \in (0,\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi)$):

$$(x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), \qquad dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Kugelkoordinaten ($r \in (0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (0, \pi)$):

$$(x, y, z) = (r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\theta), \qquad dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Ableitung inverser trigonometrischer Funktionen

(1) $\sin'(x) = \cos(x) \qquad \cos'(x) = -\sin(x) \qquad \tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$

(2) $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Vektorfelder.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Divergenz von F (Quellenstärke) : $\quad \mathrm{div} F = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F_i,$

Rotation von F, im Fall $n = 2$: $\quad \mathrm{rot}\, F = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$

Rotation von F, im Fall $n = 3$: $\quad \mathrm{rot}\, F = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}$