Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Peter S. Jossen

15. August 2019

Analysis I & II Prüfung - Teil A

CHAB | ITET | MATH | PHYS

Name: ....

Legi-Nr.: ....

Anleitungen für Teil A (120 Minuten)

- Schreiben Sie alle Antworten auf diese Blätter, es werden keine weiteren Blätter eingesammelt! Bitte lassen Sie diese Blätter zusammengeheftet.
- Sie dürfen Notizpapier verwenden.
- Falls Sie vor 9:45 fertig sind, legen Sie den Prüfungsteil A ins Kuvert zurück, und verlassen stillschweigend den Saal. Nach 9:45 bleiben Sie bitte bis zum Ende des ersten Prüfungsteils an Ihrem Platz.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle
1	[8]		**6**	[8]		**11**	[8]	
2	[8]		**7**	[8]		**12**	[8]	
3	[8]		**8**	[8]		**13**	[8]	
4	[8]		**9**	[8]		**14**	[8]	
5	[8]		**10**	[8]		**15**	[8]	

Gesamtpunktzahl:	[120]

Frage 1. [**8 Punkte**] Was besagt der Banach'sche Fixpunktsatz? (Hinweis: Falls Sie jetzt etwas über X und d schreiben, so dürfen Sie nicht vergessen, dazu zu sagen, was X und d sind!)

Lösung. Wie in Satz 10.33 des Skripts:

Sei (X, d) ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum. Sei $T : X \to X$ eine Abbildung, die eine Kontraktion ist, d.h. es existiert eine reelle Zahl $0 \le \lambda < 1$ so dass

$$d(T(x_1), T(x_2)) \le \lambda d(x_1, x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in X.$$

Dann besitzt T genau einen Fixpunkt in X, d.h. $\exists!\, a \in X$ mit $T(a) = a$.

Punktverteilung.

+1 (X, d) metrischer Raum

+1 X nicht leer

+2 X vollständig

+2 Es gibt $L < 1$ so, dass für alle x, y gilt $d(T(x), T(y)) \le Ld(x, y)$

+1 Existenz eines Fixpunkts

+1 Eindeutigkeit

Keinen Abzug für strikte Ungleichung $d(T(x), T(y)) < Ld(x, y)$.
Für $L \le 1$ nur $+1$ (statt $+2$) und für keine Bedingung an L 0 Punkte, aber +1 bei falscher Definition, solange "T ist eine Kontraktion" gesagt wird.

Kein Abzug für X Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit induzierter Metrik und X abgeschlossen (aber -1 für andere/falsche Metrik, -2 bei fehlender Abgeschlossenheit/Vollständigkeit, etc.).

Frage 2. [**8 Punkte**]

(a) Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ heisst Lipschitz-stetig falls... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die nicht Lipschitz-stetig ist an. Erklären Sie Ihre Antwort in einem Satz (ohne Rechnungen).

Lösung.

(a) Wie in Übung 4.77 des Skripts:

Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ heisst Lipschitz-stetig, falls eine Konstante $L > 0$ existiert so dass für alle $x, y \in [0,1]$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

(b) Ein Beispiel einer nicht Lipschitz-stetigen Funktion ist $f(x) = \sqrt{x}$: wie bekannt ist f stetig aber nicht Lipschitz-stetig in 0.

Punktverteilung.

+4 for def. of Lipschitz; only $+2$ if they forget quantifier for x, y or if they don't mention L separately; 0 if they forget all quantifiers or if they mess up the order

+2 for good counterexample

+2 for proof that it works

Writing $L \leq 1$ or similar stuff is punished with -2 (in the first part).

Frage 3. [**8 Punkte**] Berechnen Sie die folgenden Integrale. *Nur die Antwort zählt.*

$$A = \int_0^1 \sin(5x+1)dx, \qquad B = \int_1^2 \frac{1+y}{y}dy,$$
$$C = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}dx, \qquad D = \int_{-1}^1 x\cos(x^5)dx.$$

Lösung. Für A, B und C berechnen wir sofort:

$$A = \left[-\frac{\cos(5x+1)}{5}\right]_0^1 = \frac{\cos 1 - \cos 6}{5},$$

und

$$B = [\log|y| + y]_1^2 = \log 2 + 1,$$

und

$$C = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_1^2 = \frac{e-1}{2}.$$

Für D bemerken wir, dass der Integrand eine ungerade Funktion ist, somit folgt gleich

$$D = 0.$$

Punktverteilung.

+4×2 für jedes korrekte Integral

Für falsches Vorzeichen gibt es 0 Punkte

Unnötige Integrationskonstanten -1

Frage 4. [**8 Punkte**] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls Sie existieren. *Nur die Antwort zählt.*

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x + x}{\log x + x}, \qquad B = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x - 1},$$

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}, \qquad D = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n!}}.$$

Lösung. Weil $\sin x$ eine beschränkte Funktion ist und weil $\log x = o(x)$ für $x \to +\infty$, folgern wir

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

Wegen der Potenz-Reihen-Darstellung von $\cos x$ gilt $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ für $x \to 0$, somit

$$B = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{2}{x}\right),$$

und dieser Grenzwert existiert nicht.

Wie bekannt gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, somit

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}) = 1.$$

Wie bekannt gilt $x^n = o(n!)$ für $n \to \infty$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und dann

$$D = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2^{2n}}{n!}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n!}} = 0.$$

Punktverteilung.

+4×2 Für jeden korrekten Grenzwert 2 Punkte.

Bei B 1 Punkt, wenn nur $+\infty$ oder $-\infty$ steht

Frage 5. [**8 Punkte**] Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3, x_1x_2x_3)$. Wir schreiben $Df(x)$ für die totale Ableitung von f an der Stelle $x \in \mathbb{R}^3$. Berechnen sie

$$Df(x)(v)$$

für den Vektor $v = (1, 2, a)$, wobei $a \in \mathbb{R}$ ein fixer Parameter ist. *Nur die Antwort zählt.*

Lösung. Die Jacobi-Matrix von f an der Stelle $x \in \mathbb{R}^3$ ist

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 0 & 0 \\ \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix},$$

Somit gilt,

$$Df(x)(v) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ \\ x_2x_3 + 2x_1x_3 + ax_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Punktverteilung.

+8 Korrekte Antwort

-4 für kleine Fehler, keine Punkte sonst.

Frage 6. [8 Punkte] Seien $n, m \geq 1$ ganze Zahlen und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbare Funktionen. Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$\varphi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarpodukt auf $\mathbb{R}^m$ ist. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $v \in \mathbb{R}^n$

$$D\varphi(x)(v) = \langle Df(x)(v), g(x) \rangle + \langle f(x), Dg(x)(v) \rangle$$

gilt. Erklären Sie, was sie tun und welche Sätze Sie verwenden.

Lösung. Als Produkt differenzierbarer Funktionen ist die Funktion $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m f^i(x) g^i(x)$ differenzierbar und für jedes $\mu = 1, \ldots n$ sehen wir mit der Produktregel, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sum_{i=1}^m f^i g^i \right)(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f^i}{\partial x_\mu}(x) g^i(x) + f^i(x) \frac{\partial g^i}{\partial x_\mu}(x) \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(x), g(x) \right\rangle + \left\langle f(x), \frac{\partial g}{\partial x_\mu}(x) \right\rangle . \end{aligned}$$

Dank der Linearität der totalen Ableitung und der Bilinearität des Skalarprodukts erhalten wir

$$\begin{aligned} D\varphi(x)(v) &= \sum_{\mu=1}^n \partial_\mu \varphi(x) v_\mu \\ &= \sum_{\mu=1}^n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(x) v_\mu, g(x) \right\rangle + \left\langle f(x), \frac{\partial g}{\partial x_\mu}(x) v_\mu \right\rangle \\ &= \langle Df(x)(v), g(x) \rangle + \langle f(x)(v), Dg(x)(v) \rangle , \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Punktverteilung.

+4 Partielle Ableitungen

-2 falls $m = 1$ betrachtet wurde

+4 Richtungsableitung

Evaluation am falschen Ort (z.B. "$\langle Dg(x), f(x) \rangle (v)$") -2

Alternativ: mit Kettenregel

+4 für einzelne Ableitungen

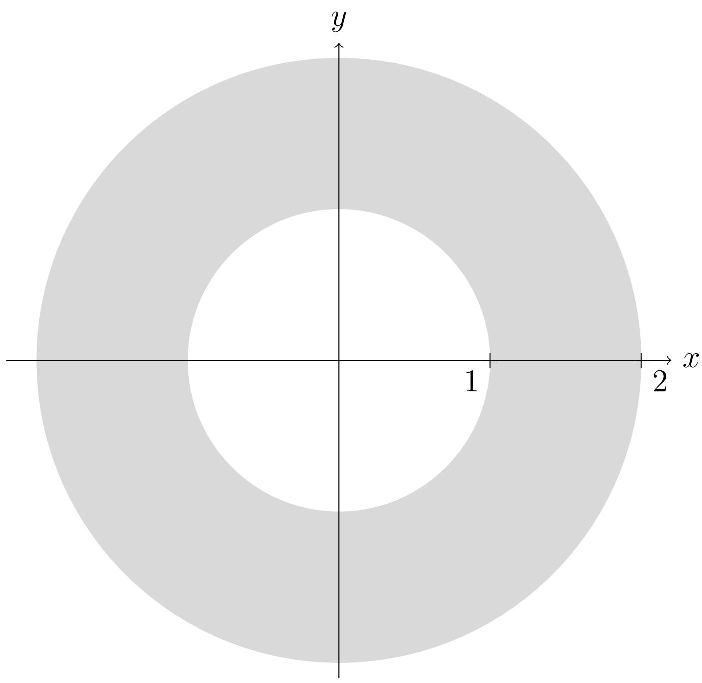
+4 Zusammensetzen

Frage 7. [**8 Punkte**] Definieren und zeichnen Sie eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ die zussammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend ist (ohne dies zu beweisen). *Zeichnung ohne Definition zählt nicht.*

Lösung. Ein Musterbeispiel ist ein Annulus:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\},$$

dessen Zeichnung ist wie folgt:



Punktverteilung.

+6 Korrekte Definition

Falsche Definition mit korrektem Bild: nur Punkte fürs Bild

Nur Wörter (z.B. "Kreisscheibe mit Loch") nur 2 Punkte (falls korrekt)

Unbeschränkte Menge nur 2 Punkte

+2 Zeichnung

Frage 8. [**8 Punkte**]

(a) Definieren Sie den Konvergenzradius einer Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$T + 4T^4 + 9T^9 + 16T^{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 T^{n^2}.$$

Falls Sie dabei ein Resultat über Konvergenzradien aus der Vorlesung benutzen, so schreiben Sie die vollständige Aussage dieses Resultats auf.

Lösung.

(a) Wie in Definition 7.55 des Skripts:

Die Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ ist die Zahl $R \in [0, \infty) \cup \infty$ gegeben durch

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

mit den Konventionen $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$.

(b) Hier sind die Koeffizienten der Reihe

$$a_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ ein Quadrat ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

somit ist der Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Punktverteilung.

Teil **(a)**:

+2 Formel für R

Betrag vergessen -1

sup *vergessen* -2

Definition mit Quotienten -2

Definition nur mit Wörten gültig $\Longleftarrow$ *Definition mit* $\limsup$ *erscheint in* (b)

+2 Konventionen

Teil **(b)**:

+4 Rechnung

Berechnung mit Quotientenregel gültig, da $\lim$ *existiert*

Für Wurzelkriterium ohne Wurzel gilt kein Punkt

Frage 9. [8 Punkte] Betrachten Sie das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und den Pfad $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = (\sin x, 1, xyz), \qquad \gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

Berechnen Sie das Pfadintegral $\int_\gamma F dt$.

Lösung. Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F dt &= \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_0^1 \left(\sin t + 2t + 3t^8 \right) dt \\
&= \left[-\cos t + t^2 + \frac{3}{9} t^9 \right]_0^1 \\
&= -\cos 1 + 2 + \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Punktverteilung.

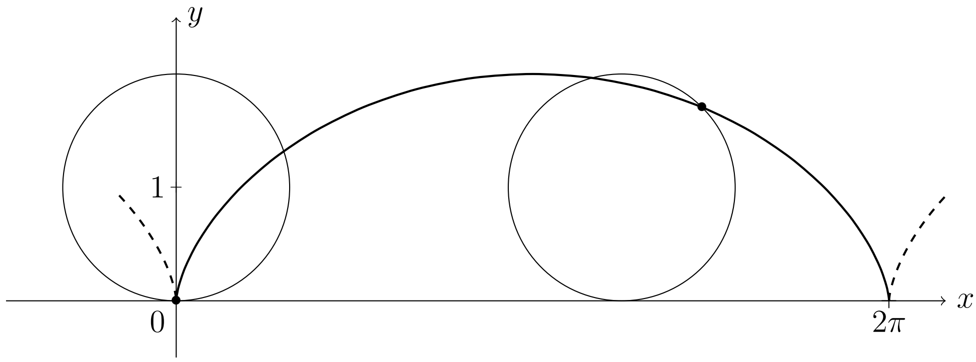
+3 Formel Pfadintegral

-2 Integralgrenzen fehlen

+3 Korrekte Substitution

+2 Rechnung

Frage 10. **[8 Punkte]** Als Zykloide bezeichnen wir die Kurve in der Ebene, die ein mit dem Kreis vom Radius 1 starr verbundener Punkt P beschreibt, wenn dieser Kreis auf einer Geraden abrollt.



Parametrisieren Sie die in der Graphik gezeichnete Zykloide als Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit Anfangspunkt $\gamma(0) = (0,0)$ und Endpunkt $\gamma(1) = (2\pi, 0)$, und schreiben Sie die Länge von γ als ein explizites Integral.

Lösung Die Parametrisierung des Kreises mit Zentrum $(0,1)$ und Radius 1 mit Anfangspunkt $(0,0)$ ist gegeben durch $c(t) = (-\sin(2\pi t), 1 - \cos(2\pi t))$, somit ist die Zykloide parametrisiert durch

$$\gamma(t) = (2\pi t, 0) + c(t) = (2\pi t - \sin(2\pi t), 1 - \cos(2\pi t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Die Länge der Kurve ist dann

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(2\pi - 2\pi\cos(2\pi t))^2 + (2\pi\sin(2\pi t))^2}\, dt \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{2 - 2\cos(2\pi t)}\, dt. \end{aligned}$$

Punktverteilung.

+4 Parametrisierung

-2 *für jede falsche Komponente*

+4 Integral

-2 *für jeden Fehler*

Frage 11. [8 Punkte] Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_E \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}},$$

wobei $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 2z\}$.

Lösung. Wir benutzen Kugelkoordinaten. Mit diesen kann E als:

$$E = \{(\rho,\varphi,\theta) : 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta, -\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

geschrieben werden, somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \frac{1}{\rho}\rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{2\cos\theta} \sin\theta d\theta \\
&= 4\pi \left.\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\right|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Punktverteilung.

+2 Verwendung von Kugel- oder Zylinderkoordinaten

+2 Beschreibung von E mit neuen Koordinaten

+2 Beschreibung des Integrals mit neuen Koordinaten

+2 Rechnung

Frage 12. [**8 Punkte**] Sie werden von einem Freund (studiert mittelalterliche Literatur an der Uni, möchte später auch mal bei Starbucks arbeiten) gefragt, wie viel

$$i^{\sqrt{2}}$$

ist. Erklären Sie in 3-4 Sätzen die Problematik bei so einem Ausdruck, und wie man ihn möglicherweise interpretieren kann.

Lösung. Man interpretiert den Ausdruck als

$$i^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\log i},$$

wobei "log" die mengenwertige Abbildung des komplexen Logarithmus ist. Das bedeutet:

$$\log i = i\frac{\pi}{2} + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

also kann man den Ausdruck als

$$i^{\sqrt{2}} = \left\{ e^{\sqrt{2}(i\pi/2+2\pi i k)} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

interpretieren.

Anderseits kann man auch nur den Hauptzweig des Logarithmus betrachten. In diesem Fall wird der Ausdruck als

$$i^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\, i} = e^{\sqrt{2} i\pi/2}$$

interpretiert.

Punktverteilung.

Aus den folgenden 10 Punkten konnten maximal 8 erreicht werden:

+2 Definition von $i^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log i}$ oder $a^b = e^{b\log a}$.

+2 Erwähnen, dass die Problematik beim komplexen Logarithmus liegt.

+2 Erklärung der Problematik (nicht eindeutig, exp nicht injektiv, Hauptzweig,...)

+2 Mögliche Lösung explizit mit Zweigen oder Angabe von Bereich in $\mathbb{C}$ so, dass log, exp bijektiv sind.

+1 $i = e^{\frac{i\pi}{2}} \implies i^{\sqrt{2}} = e^{\frac{i\pi\sqrt{2}}{2}}$

+1 Erwähnung, dass dies nur eine mögliche Lösung ist.

Frage 13. [**8 Punkte**] Wir schreiben die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \cos(x^2 + x)$ als Taylor-Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3. *Nur die Antwort zählt.*

Lösung. Weil

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = -1, \qquad f'''(0) = -6,$$

erhalten wir

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad a_3 = -1.$$

Punktverteilung.

+4×2 für jeden korrekten Koeffizient

Einfach Berechnung der Ableitungen gibt keine Punkte

Frage 14. [**8 Punkte**] Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$:

$$xu''(x) + 2u'(x) + \omega^2 xu(x) = 0,$$

wobei $\omega > 0$ eine fixe Konstante bezeichnet. Finden Sie alle beschränkten Lösungen dieser Differentialgleichung. *Hinweis: betrachten Sie die Funktion $v(x) = x\,u(x)$.*

Lösung Die Differentialgleichung, die die vorgeschlagene Funktion v erfüllt ist

$$v''(x) + \omega^2 v(x) = 0,$$

deren Lösungen bekanntlich $v(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$ sind, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$. Daraus folgt, dass die Lösungen der ursprünglichen DGL

$$y(x) = c_1 \frac{\cos(\omega x)}{x} + c_2 \frac{\sin(\omega x)}{x},$$

sind, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die beschränkten Lösungen sind somit

$$y(x) = c \frac{\sin(\omega x)}{x},$$

für $c \in \mathbb{R}$.

Punktverteilung.

+3 Korrekte DGL der vorgeschlagenen Funktion

+3 Korrekte Lösung der ursprünglichen DGL

Nur komplexe Darstellung gibt 1 Punkt

Durch x Teilen vergessen -2

+2 Korrekte beschränkte Lösung

Frage 15. [**8 Punkte**] Was besagt das Zorn'sche Lemma?

Lösung. Wie im Satz 2.97 des Skripts:

Jede induktiv geordnete Menge besitzt maximale Elemente.

Punktverteilung.

+8 Korrekte Antwort oder alternative Formulierung des Lemmas.

Wenn einer der folgenden Begriffe fehlt oder falsch ist, nur 2 Punkte: induktiv, geordnet, Menge, maximale Elemente

Kein Abzug, wenn "Körper" statt "Menge" der einzige Fehler ist.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Peter S. Jossen

15. August 2019

Analysis I & II Prüfung - Teil B

CHAB | ITET | MATH | PHYS

Name: ....

Legi-Nr.: ....

Anleitungen für Teil B (120 Minuten)

- Lesen Sie alle fünf Aufgaben aufmerksam durch. Entscheiden Sie sich anschliessend für *eine* Aufgabe, die sie *nicht* machen möchten.

Folgende Aufgabe mache ich nicht: [ ]

- Lösen Sie die anderen vier Aufgaben auf separaten Blättern. Bitte numerieren Sie Ihre Blätter und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Am Ende der Prüfung werden Ihre Blätter zusammengeheftet. Bitte achten Sie auf die richtige Reihenfolge. Legen Sie anschliessend Teil B ins Kuvert, und geben Sie das Kuvert ab.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle
	[30]	
	[30]	
	[30]	
	[30]	

Gesamtpunktzahl: [120]

Aufgabe 1. [30 Punkte] Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Definieren Sie: Eine *Norm* auf V ist ...

(b) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Definieren Sie: V ist *vollständig* falls ...

(c) Geben Sie ein Beispiel für einen *nicht vollständigen* normierten Vektorraum. Beweisen Sie Ihre Aussage.

(d) Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und V der Vektorraum aller reellwertigen stetigen Funktionen auf I. Definieren Sie die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf V. Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ tatsächlich eine Norm ist.

(e) Seien V und $\|\cdot\|_\infty$ wie in **(d)**. Beweisen Sie, dass V vollständig ist.

Lösung.

(a) Wie in Definition 6.125 des Skripts:

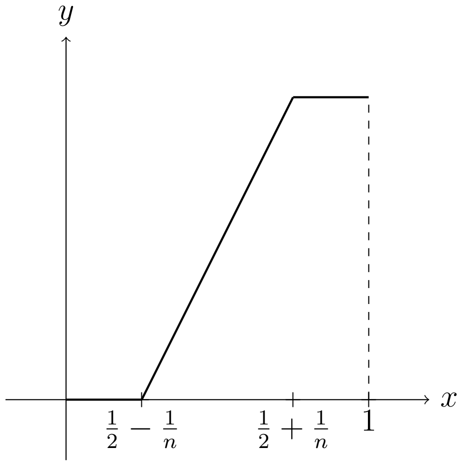
Eine Norm auf V ist eine Funktion $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ so dass

- $\|v\| = 0$ genau dann wenn $v = 0$,
- $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$,
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

(b) $(V, \|\cdot\|)$ heisst vollständig wenn er ein vollständiger metrischer Raum für die induzierte Distanz $d(v, w) = \|v - w\|$ ist.

(c) Ein Musterbeispiel ist $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, wobei $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ die L^1-Norm ist. Um zu sehen, dass dieser normierte Raum nicht vollständig ist, betrachten wir die Folge (siehe die Figur)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right], \\ \frac{n}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{n}{4}, & x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right), \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}1\right]. \end{cases}$$



Man sieht leicht, dass $\lim_{n\to\infty}\|f_n-\chi_{[1/2,1]}\|_1=0$, wobei

$$\chi_{[1/2,1]}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1/2),\\ 1 & x\in[1/2,1].\end{cases}$$

somit ist die Folge stetiger Funktionen $(f_n)_n$ Cauchy für die Norm $\|\cdot\|_1$, aber χ ist offensichtlich nicht stetig.

(d) Sei $f:I\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ihre sup-Norm ist

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in I}|f(x)|.$$

Wir sehen dass:

- $\|f\|_\infty=0$ genau dann wenn $f(x)=0$ für jedes $x\in I$, d.h. wenn $f=0$;
- für jedes $\lambda\in\mathbb{R}$ und $x\in I$ gilt $|\lambda f(x)|=|\lambda||f(x)|$, daraus folgt $\|\lambda f\|_\infty=|\lambda|\|f\|_\infty$;
- falls $g:I\to\mathbb{R}$ eine andere stetige Funktion ist, für jedes $x\in I$ gilt $|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|\leq|g(x)|$, daraus folgt

  $$\sup_{x\in I}|f(x)+g(x)|\leq\sup_{x\in I}(|f(x)|+|g(x)|)\leq\sup_{x\in I}|f(x)|+\leq\sup_{x\in I}|g(x)|,$$

  und dies zeigt, dass $\|f+g\|_\infty\leq\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$.

Wir haben also bewiesen dass $(C(I,\mathbb{R}),\|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum (auf $\mathbb{R}$) ist.

(e) Sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge auf $C(I,\mathbb{R})$, d.h. so dass $\lim_{m,n\to\infty}\|f_m-f_n\|_\infty=0$.

- Wir beweisen zuerst, dass $(f_n)_n$ punktweise gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Das folgt, weil für jedes $x \in I$ die Folge $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge auf dem vollständigen Vektorraum $\mathbb{R}$ ist, somit, wenn wir

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in I$$

setzen, dann konvergiert nach Definition $(f_n)_n$ punktweise gegen f.

- Wir beweisen jetzt, dass die Konvergenz gleichmässig ist. Weil

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_m(x) - f_n(x)| = 0,$$

gilt, folgt aus der punktweisen Konvergenz insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0,$$

wie behauptet.

- Wir beweisen die Stetigkeit von f. Seien $x_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ fixiert. Wir bemerken zuerst, dass man für jedes $x \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ abschätzen kann

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \end{aligned}$$

Aufgrund der gleichmässigen Konvergenz existiert ein $n \in \mathbb{N}$ gross genug, so dass $|f(x_0) - f_n(x_0)| + |f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon/2$ für jedes $x \in I$. Nun existiert für dieses bestimmte n aufgrund der Stetigkeit von f_n, ein $\delta > 0$ so dass $|f_n(x) - f_n(x_0)| \le \varepsilon/3$ für jedes $x \in I$ mit $|x - x_0| \le \delta$. Somit erhalten wir

$$|f(x_0) - f(x)| \le \varepsilon \quad \forall x \text{ so dass } |x - x_0| \le \delta,$$

was die Stetigkeit von f beweist.

Punktverteilung.

+3 für (a)

+1 für Definitheit

+1 für absolute Homogenität

+1 für Subadditivität bzw. Dreiecksungleichung (äquivalente Definitionen sind okay)

Kein Abzug, wenn Nicht-Negativität weggelassen wird.
Kein Abzug, wenn nicht erwähnt wird, dass $\|0\| = 0$ *(dies folgt aus Homogenität).*

+2 für (b)

- +2 "Vollständigkeit bezüglich induzierter Metrik" oder "jede Cauchy-Folge konvergiert"

+8 für (c)

- +4 für ein gutes Beispiel
- +4 für Erklärung, warum dies ein Beispiel ist (nicht pingelig, aber keine Folgefehler)

+6 für (d)

- +2 für korrekte Definition einer Norm
- +1 fürs Überprüfen der Definitheit, ohne einfach "$\|f\| = 0 \iff f = 0$" zu schreiben
- +1 für Homogenität
- +1 für "$\max|f(x) + g(x)| \leq \max(|f(x)| + |g(x)|)$"
- +1 für "$\max(|f(x)| + |g(x)|) \leq \max|f| + \max|g|$"

  (nur +1 anstatt der obigen 2 Punkte, wenn steht "$\max|f(x) + g(x)| \leq \max|f| + \max|g|$*")*

+11 für (e)

- +4 für Betrachtung einer Cauchy-Folge
- +2 für die Beobachtung, dass die Folge punktweise konvergiert, mit Erklärung
- +1 für uniforme Konvergenz zum gewünschten Grenzwert
- +4 für den Beweis der Stetigkeit des Grenzwerts (Kein Abzug für die Wahl von δ vor (anstatt nach) N)

Aufgabe 2. **[30 Punkte]** Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge.

(a) Definieren Sie: A ist *offen* falls ..., und geben Sie ein Beispiel für eine nichtleere, offene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ an.

(b) Definieren Sie: A ist *abgeschlossen* falls ..., und geben Sie ein Beispiel für eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ an.

(c) Geben Sie verschiedene Charakterisierungen von: A ist *kompakt* falls ... (ohne Beweis dass diese äquivalent sind). Geben Sie ein Beispiel für eine nichtleere, kompakte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ an.

Für Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und $B \subseteq \mathbb{R}^2$ schreiben wir $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie, in dem Sie eine geeignete Charakterisierung von Kompaktheit aus (3) benutzen:

(d) Ist A offen oder B offen, so ist $A + B$ offen.

(e) Ist A abgeschlossen und B kompakt, so ist $A + B$ abgeschlossen.

(f) Sind A und B kompakt, so ist $A + B$ kompakt.

Lösung.

(a) Wie in Definition 10.17 des Skripts:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ heisst offen falls für jedes $x \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass, wenn $B_\varepsilon(x)$ der offene Ball mit Zentrum x und Radius ε bezeichnet, gilt $B_\varepsilon(x) \subseteq O$.

(b) A heisst abgeschlossen, wenn sein Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus A$ offen ist.

(c) Wie in Definition 10.35 des Skripts:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ heisst kompakt falls jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Ein Beispiel einer alternativen Charakterisierung folgt aus dem Satz von Heine-Borel: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

(d) Wir bemerken zuerst, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ und jedes $r > 0$ aus der Definition folgt

$$B_r(x) = B_r(0) + x.$$

Nehmen wir jetzt an, dass A offen ist, und sei $x = a + b \in A + B$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(a) \subseteq A$, aber dann

$$B_\varepsilon(a + b) = B_\varepsilon(0) + a + b = B_\varepsilon(a) + b \subseteq A + B,$$

somit ist $A + B$ offen.

(e) Sei $x_n = a_n + b_n$ eine Folge in $A + B$ die gegen $x \in \mathbb{R}^2$ konvergiert. Wir wollen beweisen, dass $x \in A + B$. Zuerst bemerken wir, dass weil B kompakt ist, ist die Folge $(b_n)_n$ beschränkt. Daraus folgt, dass auch die Folge $a_n = x_n - b_n$ beschränkt ist, und deswegen existieren Teilfolgen a_{n_j} und b_{n_j} die kovergent sind. Weil beide A und B abgeschlossen sind, gilt

$$\begin{aligned} a_{n_j} &\to a \quad \text{in } A, \\ b_{n_j} &\to b \quad \text{in } B, \end{aligned}$$

aber anderseits gilt auch $a_{n_j} + b_{n_j} \to x$, somit $x = a + b \in A + B$, wie behauptet.

(f) Der Heine-Borel Satz besagt, dass ein Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ kompakt ist genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Aus (e) folgt, dass $A + B$ abgeschlossen ist, und weil A und B beschränkt sind, so ist $A + B$ auch beschränkt. Somit schliessen wir, dass die Teilmenge kompakt ist.

Punktverteilung.

+3 für (a)

Korrekte Definition ist 2 Punkte

Beispiel ist 1 Punkt

+3 für (b)

Korrekte Definition ist 2 Punkte

Beispiel ist 1 Punkt

+6 für (c)

1. Charakterisierung ist 3 Punkte

2. Charakterisierung ist 2 Punkte

Beispiel ist 1 Punkt

+6 für (d)

für klar erkennbaren Ansatz 3 Punkte

Nutzung von Translationsinvarianz: 3 Punkte

+6 für (e)

für klar erkennbaren Ansatz 2 Punkte

Konvergente Teilfolgen 2 Punkte

Richtiger Abschluss des Beweises 2 Punkte

+6 für (f)

für die Nutzung von (e) 3 Punkte

Beobachtung, dass die Summe wieder beschränkt ist, 3 Punkte

Aufgabe 3. [30 Punkte] Die Teilmenge

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \text{ und } z \geq 0\}$$

von $\mathbb{R}^3$ ist die obere Hälfte der vollen, abgeschlossenen Kugel mit Zentrum 0 und Radius 3. Für einen fixen reellen Parameter $c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die durch

$$f(x, y, z) = x + 2y + cz^2$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle globalen Maxima der Funktion f auf H: Wo auf H nimmt die Funktion f ihren maximalen Wert an, und was ist dieser Wert? Erklären Sie dabei in vollständigen Sätzen was Sie tun, und warum. Strukturieren Sie Ihre Lösung gut, und seien Sie insbesondere präzise bei möglichen Fallunterscheidungen. Bitte benutzen Sie folgende Notation, falls nötig:

$$\begin{aligned}
U &= \text{das Innere von } H \\
S &= \text{die halbe Sphäre } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9, z > 0\} \\
D &= \text{die Kreisscheibe } \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 9\} \\
C &= \text{der Kreis } \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\}
\end{aligned}$$

Lösung.

Der Gradient von f ist

$$\operatorname{grad}(f)(x, y, z) = (1, 2, 2cz)$$

Wir beginnen damit, lokale Maxima von f auf U, S, D, C mit der Methode von Lagrange zu finden.

Auf U hat f keine lokalen Extrema, da $\operatorname{grad}(f) \neq 0$ auf ganz U.

Auf S: Eine Normale an S im Punkt $(x, y, z) \in S$ ist der Vektor (x, y, z) selbst. Die Lagrange Gleichungen für Extrema mit Nebenbedingungen sind

$$\begin{cases} (1, 2, 2cz) = \lambda(x, y, z), \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ z > 0, \end{cases}$$

Es folgt $\lambda = 2c$, und damit ergibt sich das einzige lokale Extremum von f auf S, der Punkt

$$P_c = \left(\tfrac{1}{2c}, \tfrac{1}{c}, \sqrt{9 - \tfrac{1}{4c^2} - \tfrac{1}{c^2}}\right)$$

unter der Bedingung, dass

$$\tfrac{5}{36} < c^2$$

gilt (bei Gleichheit wäre die z-Koordinate von P_c Null, und also $P_c \notin S$). Man hat in dem Fall

$$f(P_c) = \tfrac{1}{2c} + \tfrac{2}{c} + 9c - \tfrac{1}{4c} - \tfrac{1}{c} = 9c + \tfrac{5}{4c}.$$

Falls $\frac{5}{36} \geq c^2$ so hat f keine lokalen Extrema auf S.

Auf D: Eine Normale an D im Punkt $(x, y, 0) \in D$ ist der Vektor $(0, 0, 1)$. Die Lagrange Gleichungen

$$\begin{cases} (1, 2, 2cz) = \lambda(0, 0, 1), \\ \quad x^2 + y^2 < 9 \end{cases}$$

haben keine Lösung. Also hat f keine lokalen Extrema auf D.

Auf C: Eine Basis des Normalenraums im Punkt $(x, y, 0) \in C$ ist durch die Vektoren $(x, y, 0)$ und $(0, 0, 1)$ gegeben. Die Lagrange Gleichungen lauten

$$\begin{cases} (1, 2, 2cz) = \lambda(x, y, 0) + \mu(0, 0, 1), \\ \quad x^2 + y^2 = 9, \\ \qquad\quad z = 0. \end{cases}$$

Aus $z = 0$ und der ersten Gleichung ergibt sich $\mu = 0$ und $y = 2x$. Das Geichungssystem reduziert sich zu

$$\begin{cases} \qquad y = 2x, \\ x^2 + y^2 = 9, \\ \qquad z = 0, \end{cases}$$

mit zwei Lösungen

$$Q^+ = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \text{und} \quad Q^- = \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}, 0\right),$$

Wegen

$$f(Q^+) = 3\sqrt{5} > 0,$$

und $f(Q^-) < 0$ ist Q^+ und nicht Q^- das Maximum von f auf C.

Für alle $c > 0$ gilt $9c + \frac{5}{4c} > 3\sqrt{5}$. Damit ergibt sich folgende Lösung für die Aufgabe:

1. Ist $c > \frac{\sqrt{5}}{6}$ so nimmt die Funktion f auf H Ihr Maximum nur im Punkt

$$P_c = \left(\tfrac{1}{2c}, \tfrac{1}{c}, \sqrt{9 - \tfrac{1}{4c^2} - \tfrac{1}{c^2}}\right)$$

an, mit Wert $f(P_c) = 9c + \frac{5}{4c}$.

2. Ist $c \leq \frac{\sqrt{5}}{6}$ so nimmt die Funktion f auf H Ihr Maximum nur im Punkt

$$Q^+ = \left(\sqrt{\tfrac{9}{5}}, 2\sqrt{\tfrac{9}{5}}, 0\right)$$

an, mit Wert $f(Q^+) = 3\sqrt{5}$.

Punktverteilung.

Suche nach kritischen Punkten in U:

+2 Berechnung von grad

-1 *Rechnungsfehler ohne Konsequenzen*

+2 $\nexists$ kritische Punkte in U

Suche nach kritischen Punkten mit Nebenbedingungen:

+2 „Ich verwende die Lagrange-Methode“

Alternativ: grad F *ist proportional zu Normalraum*

Kritische Punkte in S:

+2 Lagrange-Funktion auf S

Alternativ: Korrekter Normalvektor

+2 Korrektes System

+2 Korrekte Lösung des System: ein einziges Punkt P_c

-1 züsatzliche, nicht gültige Lösungen

+2 Existenz-Bedingung für P_c: $c^2 < 36$

+2 Bewertung von $f(P_c)$

Kritische Punkte auf C:

+2 Lagrange-Funktion auf C

Alternativ: Korrekte Normalvektoren

Für grob rezykliertes System für S mit $z = 0$ eingesetzt (ohne gültige Erklärung) gilt hier: kein Punkt

Alternativ: $f \circ \gamma$ mit $\gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi)$ betrachten

+2 Korrektes System

Hier nur $+1$ falls System für S grob rezykliert wurde

Alternativ: $(f \circ \gamma)'(t) \stackrel{!}{=} 0$

+2 Korrekte Lösungen: Q^+ und Q^-

Alternativ: $t = \arctan 2$

+2 Bewertung von $f(Q^+)$ und $f(Q^-)$ und Abschätzung $f(Q^+) > f(Q^-)$

Kritische Punkte auf D:

+2 Kein kritischer Punkt (mit korrektem Argument)

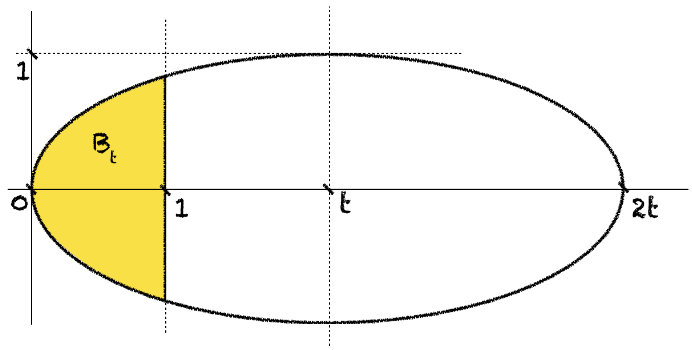
Schlussfolgerung:

+2 $f(P_c) > f(Q^+)$

Nur die Idee gilt $+1$

+2 Konklusion

Aufgabe 4. [30 Punkte] Für eine reelle Zahl $t > 0$ bezeichne $E_t \subseteq \mathbb{R}^2$ die achsenparallele Ellipse mit Zentrum t auf der x-Achse, horizontalem Radius t und vertikalem Radius 1. Wie in der folgenden Skizze dargestellt bezeichne B_t die durch E_t und die Gerade $x = 1$ beschränkte Fläche.



Wir definieren die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t) = \mathrm{Vol}(B_t) = \int_{B_t} dx.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Was passiert für $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$? Was passiert für $t \to \infty$? Was vermuten Sie über die Extremwerte von f?

(b) Berechnen Sie die Ableitung von f an der Stelle $t_0 = 2$. Erklären Sie, was Sie tun in vollständigen Sätzen.

(c) Ist die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ von Klasse C^1? Begründen Sie!

(d) Beweisen Sie: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Lösung.

(a) Die Funktion f ist linear im Intervall $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, gegeben durch

$$f(t) = t\pi.$$

Für $t > \frac{1}{2}$ steigt f zunächst monoton an, und wird irgendwann beginnen monoton gegen 0 zu streben, somit hat f ein eindeutiges Maximum, das in $(1/2, +\infty)$ liegt, aber wo genau ist nicht klar.

(b) Die implizite Gleichung für die Ellipse E_t ist

$$y^2 + \frac{(x-t)^2}{t^2} = 1.$$

Der obere Rand von E_t ist der Graph der Funktion

$$y = \sqrt{1 - (\tfrac{x-t}{t})^2} = \sqrt{2\tfrac{x}{t} - (\tfrac{x}{t})^2}.$$

Für $t \geq \frac{1}{2}$ ist die Funktion f damit durch das Parameterintegral

$$f(t) = 2\int_0^1 \sqrt{2\tfrac{x}{t} - (\tfrac{x}{t})^2}dx = 2\int_0^{1/t} t\sqrt{2z - z^2}dz$$

gegeben. Schreiben wir $G : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ für die durch

$$G(s) = \int_0^s \sqrt{2z - z^2}dz \qquad\qquad G'(s) = \sqrt{2s - s^2}$$

erklärte Stammfunktion, so ergibt sich $f(t) = 2tG(\frac{1}{t})$ und damit

$$f'(t) = 2G(\tfrac{1}{t}) + 2t \cdot \tfrac{-1}{t^2}G'(\tfrac{1}{t}) = 2G(\tfrac{1}{t}) - \tfrac{2}{t}\sqrt{\tfrac{2}{t} - \tfrac{1}{t^2}}$$

aus Produkt- und Kettenregel. Der Formelsammlung entnehmen wir

$$G(s) = \frac{(s-1)\sqrt{2s - s^2} + \arcsin(s-1)}{2} + \frac{\pi}{4},$$

also

$$\begin{aligned} f'(t) &= (\tfrac{1}{t} - 1)\sqrt{\tfrac{2}{t} - (\tfrac{1}{t})^2} + \arcsin(\tfrac{1}{t} - 1) + \frac{\pi}{2} - \tfrac{2}{t}\sqrt{\tfrac{2}{t} - \tfrac{1}{t^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \arcsin(\tfrac{1}{t} - 1) - (1 + \tfrac{1}{t})\sqrt{\tfrac{2}{t} - \tfrac{1}{t^2}}. \end{aligned}$$

Für $t_0 = 2$ eingesetzt erhalten wir

$$f'(2) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

(c) Die linksseitige Ableitung von f an der Stelle $t_0 = \frac{1}{2}$ ist π, da f im Intervall $(0, \frac{1}{2}]$ linear ist, gegeben durch $f(t) = \pi t$. Die rechtsseitige Ableitung ist entsprechend der Formel in Teil (b) durch

$$\lim_{t \to 1/2} \frac{\pi}{2} + \arcsin(\tfrac{1}{t} - 1) - (\tfrac{1}{t} - 1)\sqrt{\tfrac{2}{t} - (\tfrac{1}{t})^2} = \frac{\pi}{2} + \arcsin(1) - 0 = \pi$$

gegeben. Links- und rechtsseitige Ableitung stimmen überein, also ist f ableitbar an der Stelle $t_0 = \frac{1}{2}$.

(d) Mit dem Ausdruck

$$f(t) = 2\int_0^1 \sqrt{2\tfrac{x}{t} - (\tfrac{x}{t})^2}dx$$

sehen wir, dass für jedes $t > 1$ der Integrand von $\sqrt{2x - x^2}$ beschränkt ist. Somit dürfen wir den Grenzwert mit dem Integralzeichen wechseln und folgern, dass $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ gilt.

+4 für (a)

+2 für "linear" oder +1 für "monoton"

+1 für Grenzwert 0

+1 für eindeutiges Maximum im Intervall $(1/2, 1)$*, aber keine Punkt für Maximum bei* $1/2$ *oder bei* 1

+18 für (b)

+8 für korrektes f, für jede korrekte Formel bis und mit $G(s)$ 2 Punkte

+8 für korrektes f', für jede korrekte Formel ab $G'(s)$ 2 Punkte

+2 für $f'(2)$

+4 für (c)

Keine Punkte für die blosse Aussage "Ja".

+4 für (d)

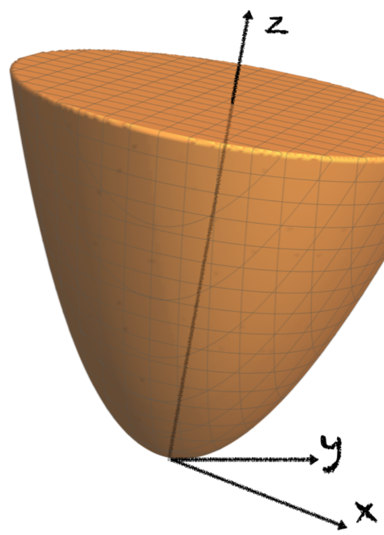
Auch 4 Punkte für eine konkrete obere Schranke der Fläche, die gegen 0 *geht. Nur 2 Punkte, wenn die obere Schranke nur implizit ist (z. B. "die Schnittpunkte von $y = 1$ mit der Ellipse").*

Aufgabe 5. (30 Punkte) Es bezeichne $P \subseteq \mathbb{R}^3$ die durch die Gleichung $z = x^2 + y^2$ gegebene Teilmenge (ein sogenanntes *Paraboloid*).

(a) Was besagt der Satz vom konstanten Rang? Zeigen Sie mit Hilfe dieses Satzes, dass P eine Untermannigfaltigkeit ist.

(b) Geben Sie eine Basis des Tangentialraums an P im Punkt $p = (1, 2, 5)$ an. Erklären Sie in vollständigen Sätzen.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ der durch das Paraboloid P und die Ebene $z = 1$ beschränkte Bereich, wie in folgender Skizze.



(c) Berechnen Sie die Aussennormale an B im Punkt $q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{13}{36})$, auf Länge 1 normiert. Erklären Sie in vollständigen Sätzen.

(d) Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = (e^z, e^x, e^x + e^y + az^2 + b\,e^z)$$

das wir als Fliessgeschwindigkeit eines Mediums auffassen, Berechnen Sie den Fluss von F durch die Oberfläche ∂B. Erklären Sie ihre Rechnungen in vollständigen Sätzen.

Lösung.

(a) Wie im Satz 12.16 des Skripts:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $F : U \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Es sei $Z = \{\mathbf{x} \in U : F(\mathbf{x}) = 0\}$ die Nullstellenmenge von F. Falls für jedes $\mathbf{x} \in M$ die lineare Abbildung $DF(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ surjektiv ist, dann ist M eine differenzierbare $(m-n)$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$.

In unserem Fall, ist P die Nullstellenmenge der Funktion $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$, dessen Differential $DF(x, y, z) = (-2x, -2y, 1)$ deutlich surjektiv ist.

(b) Wie bekannt, für $p = (x, y, z) \in P$ gilt $T_pP = \ker(DF(p))$, somit in unserem Fall gilt

$$\ker(DF(1, 2, 5)) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{(2, -1, 0), (1, 0, 2)\} .$$

(c) Normale Vektoren sind proportional zum Gradient von F an dem gegebenen Punkt, was in unserem Fall lautet

$$\operatorname{grad} F(1/3, 1/2, 13/36) = (-2/3, -1, 1).$$

Weil dieser Vektor nach innen zeigt und Norm $\sqrt{22}/3$ hat, ist die Aussernormale von Lange 1 an der gegebene Stelle durch

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{22}}(2, 3, -3).$$

gegeben.

(d) Wir benutzen den Divergenzsatz und Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} F \cdot n \, d\sigma &= \int_B \operatorname{div}(F) dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} (2az + be^z)\rho d\varphi d\rho dz \\ &= \frac{2a\pi}{3} + b\pi.\end{aligned}$$

Punktverteilung. Teil **(a)**:

+4 Aussage des Satzses

-1 *„differenzierbar" fehlt*

-1 *Dimension der Teilmannigfaltigkeit fehlt*

-1 *„surjektiv" fehlt oder nur wenn „mit vollem Rang" ohne „$m \geq n$" steht*

-1 *„$DF(x)$ surjektiv auf ganz U"*

+2 P ist Teilmannigfaltigkeit

Teil **(b)**:

+4 $\ker(DF(p)) = T_pM$

+4 Für eine Basis

   -2 *für jeden falschen Vektor*

Teil **(c):**

+4 normale Vektoren sind proportional zu $\operatorname{grad} F$

   Alternativ: normale Vektoren sind proportional zu $v \times w$, wobei v, w eine Basis des Tangentialraums ist

+4 Berechnung

   -2 *Normalisierung fehlt*

   -1 *Normalisierung falsch wegen Multiplikation (statt Teilung) für richtige Norm*

   -2 *Falsche Richtung*

Teil **(d)**:

+2 Divergenzsatz

+2 Berechnung von $\operatorname{div} F$

+4 Berechnung des Integrals

   $+2$ *Richtige Parametrisierung*

   $+2$ *Ausrechnung*

Alternativ: direkte Berechnung ohne Divergenzsatz

+4 Berechnung des Deckelflussintegrals

   +2 richtige Parametrisierung

   +2 Rechnung

+4 Berechnung des Mantelflussintegrals

   +2 richtige Parametrisierung

   +2 Rechnung