Frage 1.

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heisst *offen*, falls . . . (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Ist die folgende Menge A offen in $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardmetrik?

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0, xy > 0 \right\}$$

Begründen Sie explizit mit der Definition aus Teilaufgabe (a).

Lösung:

(a) Eine Teilmenge A eines metrisches Raumes (X, d) ist genau dann offen, wenn es für jeden Punkt $z \in A$ ein $r > 0$ gibt, so dass der Ball $B(z, r) = \{z' \in X \mid d(z, z') < r\}$ komplett in A liegt.

(b) Ja, wir bemerken, dass $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$ ist. Die Menge A ist offen: Sei $(x, y) \in A$ und $r = \min(x, y)$, dann gilt für $(x', y') \in B((x, y), r)$, dass $x' > x - r \geq 0$ und $y' > y - r \geq 0$. Also $(x', y') \in A$.

Punkteverteilung:

(a) 3 Punkte

-1P pro Fehler, z.B. ungenau mit $\forall$ und $\exists$

-2P pro Fehler, falls Aussage stark verändert

Ball muss nicht definiert werden. $0P$ für Definition für Intervalle, $0P$ für Definition über Komplement / Randpunte / Folgen / Urbilder von Funktionen / innerer Punkt.

1P Definition durch Umgebung

(b) 5 Punkte

0P (N) A nicht offen, keine Punkte für Begründung.

2P (J) A offen.

1P (R) Radius richtig.

1P (B1) Aussage: Punkte im Ball sind in A.

1P (B2) Rechnung: Punkte im Ball sind in A.

max 3P (A) Aussage $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ und wähle Radius klein genug.

Frage 2. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

(a) Die Funktion f heisst *Lipschitz-stetig*, falls ... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Seien f und g beide Lipschitz-stetig. Ist es wahr, dass $f + g$ Lipschitz-stetig ist? Falls ja, erklären Sie warum. Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

(c) Seien f und g beide Lipschitz-stetig. Ist es wahr, dass $f \cdot g$ Lipschitz-stetig ist? Falls ja, erklären Sie warum. Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

Lösung:

(a) ... es ein $L > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Ja, wir nehmen an, dass es ein $L > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt und dass es ein $L' > 0$ gibt, so dass $|g(x) - g(y)| \leq L'|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Dann folgt

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))| \leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leq L|x-y|+L'|x-y| = (L+L')|x-y|,$$

woraus wir folgern, dass $f + g$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $L + L'$.

(c) Nein: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x$ ist Lipschitz-stetig. Die Funktion $f \cdot f$ sendet $x \mapsto x^2$ und ist nicht Lipschitz-stetig.

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

1P Bedingungen

1P Formel

(b) 3 Punkte

1P Ja/Nein korrekt

2P Beweis

(c) 3 Punkte

1P Ja/Nein korrekt

2P Beispiel

Frage 3. Berechnen Sie die folgenden Integrale. (Nur die Antwort zählt.)

$$A = \int_3^5 \frac{2}{1-x^2}\,dx, \qquad B = \int_0^1 \frac{1}{e^{2x}}\,dx,$$

$$C = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx, \qquad D = \int_{-2}^2 x^2\Big(1+\sin x\Big)\,dx,$$

Lösung:

(a)

$$\int_3^5 \frac{2}{1-x^2}\,dx = \int_3^5 \frac{1}{1-x}\,dx + \int_3^5 \frac{1}{1+x}\,dx = [-\log(x-1)]_3^5 + [\log(1+x)]_3^5$$

Also $A = \log 2 - 2\log 4 + \log 6$.

(b)

$$B = \int_0^1 \frac{1}{e^{2x}}\,dx = \left[-\frac{1}{2e^{2x}}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-2}).$$

(c) C ist ein uneigentliches Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[2\sqrt{x+1}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}(2\sqrt{R+1}-2),$$

welches nicht konvergiert, bzw Grenzwert ∞ hat.

(d) Die Funktion $x \mapsto x^2 \sin x$ ist ungerade, das Integral über $[-2,2]$ ist daher 0. Uns bleibt

$$D = \int_{-2}^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^2 = \frac{16}{3}.$$

Punkteverteilung:

je 2P: keine Teilpunkte

Frage 4. Existieren die folgenden Grenzwerte? Falls ja, berechnen Sie sie. (Nur die Antwort zählt.)

$$A = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{1 - 2^x}, \qquad B = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x},$$

$$C = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}\,\sin(\log x)}{x}, \qquad D = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 - x)^{\frac{1}{2x}}.$$

Lösung:

(a) Wir schreiben $2^x = \exp(x \log(2))$, erhalten

$$\frac{\sin x}{1 - 2^x} = \frac{x + O(x^2)}{1 - (1 + x\log(2) + O(x^2))}$$

und schliessen $A = -\frac{1}{\log 2}$.

(b) Wir faktorisieren $\sqrt{x}$ und erhalten

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x} = \frac{1}{1 - \sqrt{x}},$$

somit ist $B = 1$.

(c) Der Term $\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$ konvergiert gegen 1 für $x \to 0$. Die Folge konvergiert wegen dem Term $\sin(\log x)$ nicht. Betrachte zum Beispiel die Teilfolge $x_n = \exp(\pi(n + \frac{1}{2}))$.

(d) Wir wechseln von x zu $y = \frac{1}{x}$, also $y \to \infty$ und erhalten

$$\left(\left(1 - \frac{1}{y}\right)^y\right)^{\frac{1}{2}},$$

welches $D = (e^{-1})^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$ ergibt.

Punkteverteilung:

je 2P: keine Teilpunkte

Frage 5. Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1^2).$$

(a) Ist f injektiv?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}^2$ ist $Df(x)$ injektiv?

Lösung:

(a) Nein, da $f(x, -x) = (x^2, 0, x^2) = f(-x, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b)

$$Df(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist injektiv für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

1P Antwort

1P Begründung

(b) 6 Punkte

2P $Df(x)$ korrekt

Option 1: 4P Begründung (**-1P** für nur "$x_1 \neq 0$ oder $x_1 \neq x_2$"

Option 2: 2P Begründung korrekt (**1P** für nur "$x_1 \neq 0$")

Frage 6. Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

gegebene Teilmenge, und sei $p = (x_0, y_0)$ ein Punkt auf E.

(a) Skizzieren Sie E und beweisen Sie, dass E eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Sie dürfen alle Resultate aus der Vorlesung benutzen.

(b) Geben Sie einen Tangentialvektor an E im Punkt p an (nicht den Nullvektor).

Lösung:

(a) Die Menge E ist eine Ellipse. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ hat Ableitung

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix},$$

ist also surjektiv für alle $(x, y) \neq (0, 0)$, im Besonderen für alle Punkte in $E = f^{-1}(1)$ Nach dem Satz vom konstanten Rang ist $E \subseteq \mathbb{R}^2$ eine $(2 - 1) = 1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(b) Der Tangentialraum an einem Punkt berechnet sich aus dem Kern der Ableitung $Df(x_0, y_0)$. Zum Beispiel

$$v(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y_0 a^2 \\ -x_0 b^2 \end{pmatrix}.$$

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte

1P Skizze

1P Definition von f

1P Ableitung $Df(x)$

1P Begründung von $Df(x)$ surjektiv auf E

1P Anwendung Satz vom konstanten Rang

(b) 3 Punkte

3P korrekter Tangentialvektor (**1P** nur Worte)

Frage 7. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = e^{xy}$, und das Vektorfeld $F = \text{grad}(f)$. Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ der durch

$$\gamma(t) = (\cos(\pi t^2), t\cos(\pi t))$$

gegebene Pfad von $A = (1, 0)$ nach $B = (-1, -1)$.

(a) Geben Sie das Vektorfeld F explizit an.

(b) Schreiben Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma F dt$ als explizites Riemann-Integral (so explizit, dass Sie es beispielsweise in Wolframalpha eingeben können).

(c) Berechnen Sie das Integral. Erklären Sie dabei Ihre Vorgehensweise!

Lösung:

(a) Das Vektorfeld F ist gegeben durch $F(x, y) = e^{xy}(y, x)$.

(b) Wir schreiben

$$\begin{aligned}\int_\gamma F dt &= \int_0^1 \exp(t\cos(\pi t^2)\cos(\pi t)) \left\langle \begin{pmatrix} t\cos(\pi t) \\ \cos(\pi t^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\pi t \sin(\pi t^2) \\ \cos(\pi t) - \pi t \sin(\pi t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \exp(t\cos(\pi t^2)\cos(\pi t)) \Big(-2\pi t^2 \cos(\pi t)\sin(\pi t^2) + \cos(\pi t^2)(\cos(\pi t) - \pi t^2 \sin(\pi t)) \Big)\end{aligned}$$

(c) Mit dem Fundamentalsatz für Parameterintegrale gilt

$$\int_\gamma F dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

(b) 4 Punkte

1P Wegintegralformel

1P $F \circ \gamma$ korrekt eingesetzt

2P $\gamma'(t)$ korrekt

(c) 2 Punkte

1P Stammfunktion benutzen

1P Rechnung

Frage 8. Sei $f(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(a) Der *Konvergenzradius* R von f ist ... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho = 0$.

(c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^{2n+1}$$

Lösung:

(a) Der Konvergenzradius ist

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0,\infty) \cup \{\infty\},$$

wobei wir die Konvention $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ benutzen.

(b) Aus zum Beispiel $a_n = n^n$ folgt $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(c) Wir haben

$$\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = |1+i|^{\frac{n}{2n+1}} = \sqrt{2}^{\frac{n}{2n+1}}.$$

Darum ist $R = 2^{-\frac{1}{4}}$.

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

-1P für Fehler beim Betrag $|\cdot|$ oder nicht Erwähnen der Fälle $0, +\infty$.

(b) 3 Punkte

2P Beispiel

1P Begründung

(c) 3 Punkte

3P Korrekte Antwort, $e^{-\frac{1}{4}\log 2}$ wird akzeptiert

max 1P Falls z^{2n+1} falsch behandelt

-1P für Fehler wie $|1+i| = 2$

Frage 9. Sei $V \subseteq \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum aller Polynome in der Variablen x mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 12. Wir möchten V mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen, die wir durch das (konvergierende) Integral

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{-x^2} dx$$

definieren.

(a) Warum erhalten wir damit tatsächlich eine Norm auf V? Erklären Sie was geprüft werden muss, und beweisen Sie anschliessend. Sie dürfen Ihnen bekannte Eigenschaften des Riemann-Integrals ohne weitere Erklärung verwenden.

(b) Ist die Funktion $I : V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $I(f) = f(0)$ stetig bezüglich dieser Norm? Begründen Sie.

Lösung:

(a) Die Dreiecksungleichung $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ folgt direkt aus der punktweisen Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$ und der Linearität des Riemann-Integrals.

Die Homogenität $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ folgt direkt aus der punktweisen Gleichung $|\alpha f(x)| = |\alpha||f(x)|$ und der Linearität des Riemann-Integrals.

Die Definitheit $\|f\| \geq 0$ und $= 0$ genau dann, wenn $f = 0$ folgt aus dem, dass $e^{-x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daraus dass für stetige Funktionen $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gilt $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 0$ genau dann, wenn $g = 0$.

(b) Ja, da der Raum der Polynome mit Grad höchstens 12 ein endlichdimensionaler Vektorraum ist und somit alle Normen äquivalent sind. Beachten Sie nun, dass die Abbildung des Polynoms auf ihren konstanten Term stetig ist bezüglich der Standardnorm auf $\mathbb{R}^{13} \cong V$.

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte

1P Definition Norm

je 1P pro Eigenschaft

(b) 4 Punkte

-2P falsche Schlussfolgerung

-1P kleine Fehler

Frage 10.

(a) Was besagt der Mittelwertsatz?

(b) Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, nicht beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (0,1)$ existiert mit $|f'(x_0)| > 9000$.

Lösung:

(a) Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(b) Wir wählen eine beliebige Zahl $a \in (0,1)$. Weil f unbeschränkt ist, gibt es ein $b \in (0,1)$ mit

$$|f(b)| > 9000 + |f(a)|.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein x_0 zwischen a und b, also auch $x_0 \in (0,1)$ so dass

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Daraus folgt mit $|b - a| < 1$ und der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|f'(x_0)| = \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \geq |f(b) - f(a)| \geq |f(b)| - |f(a)| > 9000.$$

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte (Bedingungen **1P** (z.B. diff'bar auf offenem Intervall) und Formel **1P**)

(b) 6 Punkte

2P (D1) Es existieren $a, b \in (0,1)$ mit $|f(b) - f(a)| > 9000$.

- **nur 1P** Ohne Betrag oder ein sinnvolles oBdA oder falls direkt $\exists a, b$ sodass $|f(b) - f(a)| > 9000|b - a|$

2P (H) Herleitung

- **1P** für $|f(b)| > |f(a)| + 9000$
- **1P** für $|f(b) - f(a)| > |f(b)| - |f(a)|$

1P (D2) für $|b - a| < 1$

1P (F) Mittelwertsatz

Frage 11. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| < (x^2+1)^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?

☐ Ja, und hier ist der Beweis:

☐ Nein, und hier ist das Gegenbeispiel:

Lösung: Ja, nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Beachte, dass $\int_0^x (t^2+1)^{-1}\,dt = \arctan x$ und darum

$$\int_0^\infty (t^2+1)^{-1}\,dt = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Mit dem Majorantenkriterium folgt aus $|f'(x)| < (x^2+1)^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass auch $\int_0^\infty f'(t)\,dt$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. In anderen Worten, der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^\infty f'(t)\,dt$$

existiert.

Wir folgern, dass auch

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x\to\infty} \int_0^x f'(t)\,dt$$

existiert.

Punkteverteilung:
8 Punkte

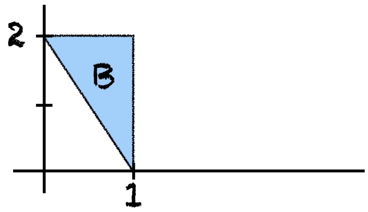
2P korrekte Antwort

2P Fundamentalsatz (Idee **1P**, Anwendung **1P**)

2P Majorantenkriterium auf Integral anwenden

2P Schlussfolgerung (Limes von Majorant **1P**)

Frage 12. Sei B die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ gegeben in folgender Graphik, und sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch $F(x, y) = (x^{12} + y^{12}, \cos(xy))$.



(a) Schreiben Sie die Integrale

$$\int_B \operatorname{div}(F)\, dxdy \qquad\qquad \int_{\partial B} F\, dn$$

als explizite Riemann-Integrale (so explizit, dass Sie sie beispielsweise in Wolframalpha eingeben können), ohne sie auszurechnen.

(b) Ist B glatt berandet? Haben die beiden Integrale trotzdem denselben Wert? Warum? Erklären Sie in Worten.

Lösung:

(a)

$$\int_B \operatorname{div}(F)\, dxdy = \int_0^1 \int_{2-2x}^2 (12x^{11} - x\sin(xy))\, dy\, dx$$

und

$$\int_{\partial B} F\, dn = \int_0^1 \cos(2(1-t))\, dt + \int_0^1 \left(-2t^{12} - 2(2-2t)^{12} - \cos(t(2-2t))\right) dt + \int_0^1 2\left(1 + (2t)^{12}\right) dt$$

(b) Der Bereich B ist nicht glatt berandet. Der Divergenzsatz funktioniert für stückweise glatt berandete Bereiche, die Integrale sind darum gleich.

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte (**je 1P** für Parametrisierung und **je 1P** für korrektes Einsetzen)

(b) 4 Punkte

1P für "nicht glatt berandet" oder "nur stückweise glatt berandet"

1P für "trotzdem selben Wert"(nur möglich falls Punkt vorher auch erhalten)

2P korrekte Begründung: "stückweise glatt berandet" oder "Ecken sind Nullmengen"

Frage 13. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = (x-1)(y-3)^2 \cos x$$

und seien $v = (1,0)$ und $w = (1,a)$ Vektoren, wobei $a \in \mathbb{R}$ ein fixer Parameter ist. Berechnen Sie

$$C_1 = D^2 f(0)(v,w) \qquad \text{sowie} \qquad C_2 = D^2 f(0)(w,v)$$

Lösung: Die Hesse Matrix bei $(x,y) = (0,0)$ ist

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Weil $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ ist, kann man die ersten Terme der Taylor Reihe um $(0,0)$ direkt rauslesen:

$$f(x,y) = -9 + 6y + 9x - y^2 - 6xy + \frac{9}{2}x^2 + \text{ höhere Terme.}$$

Also ist

$$D^2 f(0)(v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = 9 - 6a.$$

Weil die Bilinearform $Df^2(0)$ symmetrisch ist gilt $C_1 = C_2 = 9 - 6a$.

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte

max 0P falls Hesse Matrix keine 2 Mal 2 Matrix

2P Definition Hesse Matrix

3P Rechnung (**-1P** pro Fehler)

max 4P falls Hesse Matrix nicht bei $(0,0)$ ausgewertet

(b) 3 Punkte

2P für C_1 oder C_2 korrekt berechnet

1P $C_1 = C_2$ oder Berechnung der anderen Zahl

Frage 14. Sie werden gebeten die reelle Zahl $\log(2)$ als Dezimalbruch bis auf 6 signifikante Nachkommastellen zu bestimmen (Fehler $< 10^{-7}$). Sie entscheiden dies mit Hilfe der konvergierenden Reihe

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

zu tun. Wie viele Terme der Reihe müssen Sie in etwa aufsummieren, um die gewünschte Präzision zu erreichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Sei $s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ die Partialsumme der gegebenen Reihe und $s = \log(2)$ der Grenzwert der Folge (s_m). Weil die Reihe alternierend ist, gilt

$$s_{2m-1} + a_{2m} = s_{2m} < s < s_{2m-1}$$

für alle $m > 1$. Der Grenzwert ist zwischen der Folge der ungeraden Glieder s_{2m-1} und der geraden Glieder s_{2m} eingequetscht. Da

$$s_{2m} - s_{2m-1} = a_{2m}$$

gilt und s zwischen diesen beiden Glieder liegt, sollten wir bei der Approximation so langen warten bis $|a_m| \leq 10^{-7}$ liegt.

Also folgt aus

$$|a_m| = \frac{1}{m} \leq 10^{-7},$$

dass $m \geq 10^7$ sein sollte.

Punkteverteilung:

max 2P Richtige Antwort, ohne/falsche Begründung

max 2P Gute Ideen, falsches Resulat

max 4P Richtige Antwort, ungenügende Begründung

max 6P Richtige Antwort, nur kleine Fehler in der Begründung

8P Richtige Antwort mit Begründung, warum der Fehler 10^{-7} eingehalten wird

Bemerkungen:

- Man kann sogar $5 \cdot 10^6$ erhalten, da man zwischen oberer und unterer Schrake hin und her pendelt.
- Verwirrung zwischen 10^{-6} und 10^{-7} ignoriert, falls andererseits korrekt argumentiert wird

Frage 15. Wählen Sie **eines** der folgenden Differentialgleichungsprobleme aus. Geben Sie eine Lösungsmethode für dieses Problem an, und finden Sie alle reellen Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in geschlossener Form, das heisst, alle Integrale sollen ausgerechnet sein! Ignorieren Sie die anderen drei Probleme.

(a) $y'' = -2xy', \quad y(0) = 1,$

(b) $y'(1 + x^2) = xy + x,$

(c) $y'''' = y, \quad y(0) = 1, \quad y$ ist beschränkt.

(d) $y'' = \dfrac{1}{y^2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Ich wähle die folgende Differentialgleichung: $\boxed{}$

Lösung:

(a) Mit $y' = z$ finden wir $z(x) = \exp(-x^2)$. Dann können wir z aber nicht in geschlossener Form berechnen. Lösung bis zum Integral wird trotzdem akzeptiert

(b) Wir lösen zuerst die homogene DGL $y'(1+x^2) = xy$. Mit Separation der Variabeln erhalten wir

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Durch integrieren folgt $\log(y) = \frac{1}{2}\log(1 + x^2)$ und wir finden die Lösungen

$$y_H = C\sqrt{1 + x^2}$$

für Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Durch Variation der Konstanten C, also $y = C(x)\sqrt{1 + x^2}$ erhalten wir die Bedingung $C'(x)(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} = x$ und erhalten

$$C(x) = \widetilde{C} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Wir finden eine Schar (parametrisiert durch $\widetilde{C} \in \mathbb{R}$) von Lösungen

$$y(x) = \widetilde{C}\sqrt{1 + x^2} - 1.$$

(c) Das charakteristische Polynom der DGL ist

$$T^4 - 1 = 0.$$

Seine Nullstellen $1, -1, i, -i$. Wir finden die Lösungen

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

für Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4. Da y beschränkt sein soll sind C_1 und C_2 beide 0. Mit $y(0) = 1$ finden wir ausserdem $C_3 = 1$. Wir finden eine Schar (parametrisiert durch $C_4 \in \mathbb{R}$) von Lösungen

$$y(x) = \cos(x) + C_4 \sin(x).$$

(d) Etwas mühsam. Siehe

`https://www.quora.com/Is-there-a-solution-to-the-differential-equation-y-frac-1-y-`

Punkteverteilung: je 8 Punkte

(a) **2P** $y' = z \Rightarrow z' = -2xz$

1P+1P $z'/z = -2x \Rightarrow ln(z) = -x^2 + C$

1P $z = \int C \exp(-x^2)$

1P $y = \int z dx$

2P Schlussfolgerung (es gibt keine geschlossene Lösung)

(b) **Option 1: 2P** $y'/y = x/(1 + x^2)$

2P $y_H = C(1 + x^2)^{1/2}$

2P $C'(x) = -(1 + x^2)^{-1/2}$

2P $y_p = -1$

Option 2: 2P $y'/(y + 1) = x/(1 + x^2)$

2P $ln(y + 1) = ln(1 + x^2)/2 + C$

2P $y + 1 = A(1 + x^2)^{1/2}$

2P $y = A(1 + x^2)^{1/2} - 1$

(c) **1P** $\lambda^4 = 1$

1P $\lambda \in \{1, -1, i, -i\}$

2P $y(x) = A \exp(x) + B \exp(-x) + C \cos(x) + D \sin(x)$

2P $A = B = 0$

1P $C = 1$

1P Schlussfolgerung $y(x) = \cos(x) + D \sin(x)$

Aufgabe 1. Sie lesen die nachfolgende Textpassage in einem Fachbuch. Erklären Sie dazu die Details. Falls Sie Sätze aus der Vorlesung benutzen, so schreiben Sie jeweils die vollständige Aussage dieser Sätze hin.

> Let $a < b$ be real numbers, and let $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ be a continuous function. We extend f to a function $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ by setting $f(x) = 0$ for $x \notin [a,b]$. Let $\epsilon > 0$. The convolution of f with a suitable mollifier yields a smooth function $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ with compact support, for which the estimate
>
> (*) $$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx < \epsilon$$
>
> holds.

(a) Was könnte hier genau mit *Mollifier* (*Glättungskern*) gemeint sein? Geben Sie eine Definition an, die in diesem Zusammenhang funktioniert. (Es empfiehlt sich zuerst einmal (c),(d),(e) zu bearbeiten.)

(b) Wie ist die Funktion g definiert?

(c) Warum ist g glatt?

(d) Was ist der Träger einer Funktion, und warum hat g kompakten Träger?

(e) Zeigen Sie, dass für einen geeigneten Glättungskern die Abschätzung $(*)$ gilt.

Lösung:

(a) Die Aufgabe gibt ein $\varepsilon > 0$ vor. Da die Funktion f stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ist, gibt es wegen gleichmässiger Stetigkeit ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

gilt.

Ausserdem ist f beschränkt. Wähle $\delta > 0$ klein genug, so dass

$$\delta \max |f| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Ein Glättungskern oder Mollifier n für diese Anwendung ist eine glatte Funktion $\psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, welche Träger (siehe Teilaufgabe (b)) in $(-\delta, \delta)$ hat und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 1$$

erfüllt.

(b) Die Funktion g ist als die Faltung von f mit dem Glättungskern ψ gegeben. Also

$$g(x) = (\psi * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y)f(y)dy.$$

(c) Per Definition von f ist

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y)f(y)dy = \int_{a}^{b} \psi(x-y)f(y)dy.$$

Mit dem Satz über Parameterintegrale können wir die Ableitung nach x ins Integral ziehen und da nur der Glättungskern ψ die Variable x benutzt und ψ glatt ist, ist auch g glatt.

(d) Der Träger $\operatorname{supp}(g)$ einer Funktion g ist der Abschluss der Menge

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Die Funktion f hat Träger in $[a, b]$ per Definition.

Falls $|x-y| > \delta$ ist, folgt $\psi(x-y) = 0$. Also, falls $x \notin [a-\delta, b+\delta]$ folgt $g(x) = 0$. Darum ist der Träger von g kompakt als Abschluss einer beschränkten Menge.

(e) Wir schätzen mit $z = x - y$ ab:

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x) - g(x)|dx &= \int_a^b \left| f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y)f(y)dy \right| dx \\
&= \int_a^b \left| f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z)f(x-z)dz \right| dx \\
&= \int_a^b \left| f(x) \int_{-\delta}^{\delta} \psi(z)dz - \int_{-\delta}^{\delta} \psi(z)f(x-z)dz \right| dx \\
&= \int_a^b \left| \int_{-\delta}^{\delta} \psi(z)(f(x) - f(x-z))dz \right| dx \\
&\leq \int_a^b \int_{-\delta}^{\delta} \psi(z) \left| f(x) - f(x-z) \right| dzdx
\end{aligned}$$

Wir teilen das Integral nun auf und nutzen die Definition von δ:

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\psi(z)\,|f(x)-f(x-z)|\,dzdx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\psi(z)\,|f(x)-f(x-z)|\,dzdx\\
&\qquad\qquad+\int_{b-\delta}^{b}\int_{-\delta}^{\delta}\psi(z)\,|f(x)-f(x-z)|\,dzdx\\
&\leq 2\max|f|\int_a^{a+\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\psi(z)dzdx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\psi(z)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}dzdx\\
&\qquad\qquad+2\max|f|\int_{b-\delta}^{b}\int_{-\delta}^{\delta}\psi(z)dzdx\\
&\qquad\qquad<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon,
\end{aligned}$$

weil das Integral von ψ über $[-\delta,\delta]$ gleich 1 ist.

Punkteverteilung:

(a) 8 Punkte

2A Glatte Funktion

2B Für $\delta>0$, Träger $supp(\psi)\in(-\delta,\delta)$

2C Normierung $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx=1$

2D Beschränkung $\psi\geq 0$ oder alternativ $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|dx\leq cst$ (diese Punkte können auch in Aufgabenteil e) vergeben werden)

(b) 3 Punkte

3E Definition der Faltung $\psi * f$ oder $f*\psi$ mittels Formel

- maximal 1 Punkt, wenn Definition ohne Formel (z.B. für $g=\psi * f$)

(c) 4 Punkte

1F Begründung "weil ψ ist glatt"

3G Vervollständigung der Begründung, z.B.

- via Lemma 14.13 (f stetig, ψ glatt und mit kompaktem Träger)
- via Satz über Parameterintegrale 11.36 (verwendet auch Stetigkeit des Integrands)
- Wichtig: Beide Begründungen verwenden Reduktion auf Integral über $[a,b]$, da f nur dort stetig ist (1 Punkt Abzug, falls Reduktion fehlt).

(d) 5 Punkte

2H Definition Träger

3I Begründung für $supp(g)$ kompakt

- davon 2 Punkte für Beschränktheit ($supp(g) \subseteq [a-\delta, b+\delta]$)
- davon 1 Punkt für Abgeschlossenheit (per Definition des Trägers) und daraus Kompaktheit (mittels Satz von Heine-Borel)

Anwendungsbeispiel: 2 Punkte für "f kompakter Träger und ψ kompakter Träger impliziert g kompakter Träger"(1 Punkt, falls nur mit f oder ψ argumentiert wird.)

(e) 10 Punkte

4J Begründen und Anwenden der gleichmässigen Stetigkeit von f

3K Begründen und Anwenden der Beschränktheit von f

1L Variablenwechsel $\psi * f = f * \psi$

1M Multiplizieren mit Eins ($\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 1$)

1N Abschätzung $|\int f dx| \leq \int |f| dx$

Aufgabe 2. Wir benutzen für diese Aufgabe die folgende Definition von Kompaktkeit:

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Raum X heisst *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat.

(a) Was ist eine offene Überdeckung von X?

(b) Zeigen Sie direkt mit obiger Definition, dass der metrische Raum $(0, 1]$ nicht kompakt ist.

Betrachten Sie die folgenden Aussagen über den metrischen Raum X:

i) Jede stetige Funktion $X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

ii) Jede stetige Funktion $X \to \mathbb{R}$ nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

iii) Der metrische Raum X ist kompakt.

iv) Jede Folge in X besitzt einen Häufungspunkt.

(c) Beweisen Sie die Äquivalenz i) $\Leftrightarrow$ ii)

(d) Beweisen Sie die Implikation iii) $\Rightarrow$ i)

(e) Beweisen Sie die Implikation iv) $\Rightarrow$ i)

Lösung:

(a) Eine offene Überdeckung von X ist eine Familie $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen $U_i \subseteq X$, so dass

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

gilt.

(b) Die offene Überdeckung $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ gegeben durch $U_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ und $U_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$ für $n \geq 2$ hat keine endliche Teilüberdeckung.

(c) Für die Implikation i) $\Rightarrow$ ii), sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Wir setzen $M = \sup f(X)$ und nehmen per Widerspruch an, dass die Funktion f ihr Maximum nicht annimmt. Damit ist die Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = (M - f(x))^{-1}$ wohldefiniert und stetig. Nach Annahme i) gibt es ein $S > 0$ mit $g(x) \leq S$ oder äquivalenterweise $f(x) \leq M - \frac{1}{S}$ für alle $x \in X$. Dies widerspricht aber der Definition von M als Supremum.

Die Implikation ii) $\Rightarrow$ i) ist trivial.

(d) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n,n)$ und somit

$$X = f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((-n,n)).$$

Die Familie $\mathcal{U} = \{f^{-1}((-n,n))\,|\,n \in \mathbb{N}\}$ ist also wegen Stetigkeit von f eine offene Überdeckung von X, womit nach iii) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^{-1}((-n,n)) = X$ existiert. Es gilt also $|f(x)| < n$ für alle $x \in X$ wie behauptet.

(e) Angenommen es gäbe eine unbeschränkte stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$. Indem wir gegebenenfalls f durch $-f$ ersetzen können wir annehmen, dass f nach oben unbeschränkt ist. Es existiert also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $f(x_n) \geq n$. Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ besitzt keine konvergente Teilfolge, da nach Stetigkeit von f für eine solche Teilfolge $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ auch die nach oben unbeschränkte Folge $(f(x_{n_k}))_{k=0}^{\infty}$ konvergieren müsste. Dies zeigt $\neg$ i) $\Rightarrow \neg$ iv).

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

-1P für kleine Ungenauigkeiten

(b) 3 Punkte

0P wenn überhaupt kein Gegenbeispiel angegeben wird oder wenn die Konstruktion des Gegenbeispiels intrinsisch falsch ist

-1P für Ungenauigkeiten in der Definition der Überdeckung

-1P für Ungenauigkeiten in der Begründung

(c) 8+1 Punkte

0 von 8P für die nicht-triviale Richtung, wenn es 'Scheinbeweise' sind, bei denen plötzlich die Existenz von Maximum oder Minimum einfach 'folgt'

+1P für die triviale Richtung

(d) 8 Punkte

max 4P für eine korrekte Argumentation, die externe Resultate verwendet, welche in der Prüfung nicht bewiesen werden (großzügig); z.B. Bilder kompakter Mengen sind kompakt (also $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt) und als kompakte Menge ist $f(X)$ beschränkt, also die Funktion f beschränkt

0P falls diese Argumentation vertauscht ist; kompakte Mengen sind (abgeschlossen und) beschränkt und stetige Funktionen bilden beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab

-1P oder -2P für Ungenauigkeiten bei Begründungen, die an sich aber wenn ordentlich aufgeschrieben, einen korrekten Beweis liefern

(e) 8 Punkte

3P für die Begründung, warum Beschränktheit entlang jeder Folge globale Beschränktheit impliziert

2P wenn Stetigkeit benutzt wird, auch wenn danach nichts mehr passiert

3P wenn aus Konvergenz Beschränktheit entlang der Folge gefolgert wird (mit Argumenten)

0P für Beschränktheit von X

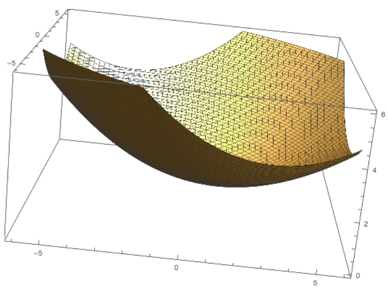
max 4P wenn (**Folgenkompaktheit** $\Leftrightarrow$ **Kompaktheit**) zusammen mit (d) verwendet wird (großzügig)

-1P für Ungenauigkeiten

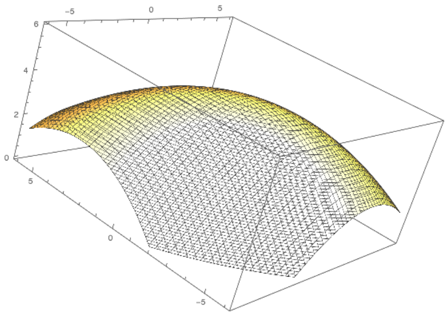
Aufgabe 3. Wir schreiben $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2$, und definieren die Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^3$ durch

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x, y) \leq 10z - 10 \text{ und } Q(x, y) \leq -10z + 50\}$$

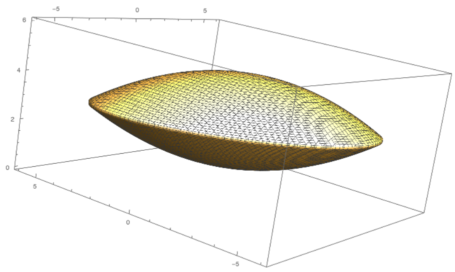
Wir wollen die kürzeste und die längste Distanz zwischen einem Punkt in B und dem Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ berechnen. Als Hilfestellung erstellen wir Computergraphiken der durch $Q(x, y) = 10z - 10$ und $Q(x, y) = -10z + 50$ definierten Parabelflächen, sowie der Menge B selbst.



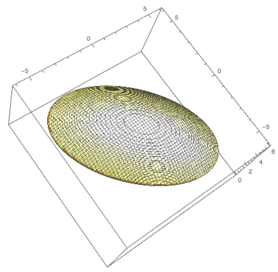
$Q(x, y) = 10z - 10$



$Q(x, y) = -10z + 50$



B von der Seite



B von oben

(a) Begründen Sie, warum überhaupt eine kürzeste und eine längste Distanz zwischen Punkten in B und dem Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ existiert.

(b) Definieren Sie die folgenden Teilmengen von B mit konkreten (Un)gleichungen:

U := Das Innere von B

S := Der obere Teil des Randes von B, ohne den Äquator

T := Der untere Teil des Randes von B, ohne den Äquator

E := Der Äquator

(c) Bestimmen Sie die kürzeste und die längste Distanz mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Bitte benutzen Sie Notation aus (b).

Lösung:

(a) Um Extrema des Abstandes von B zum Ursprung zu finden, betrachten wir die Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Die Menge B ist abgeschlossen (Schnitt zweier abgeschlossener Mengen) und ist beschränkt ist ($z \geq 1$ aus der ersten Bedingung, $z \leq 5$ aus der zweiten Bedingung, doch dann folgt immer $x^2 + xy + y^2 \leq 20$, was x und y beschränkt.) Darum ist B kompakt und die stetige Funktion f nimmt ihr Maximum und Minimum auf B an.

(b)

$$\begin{aligned}
U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x, y) < 10z - 10 \text{ und } Q(x, y) < -10z + 50\} \\
S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 3 \text{ und } Q(x, y) = -10z + 50\} \\
T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x, y) = 10z - 10 \text{ und } z < 3\} \\
E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x, y) = 20 \text{ und } z = 3\}
\end{aligned}$$

(c) Wir wollen Extrema der Funktion f nacheinander auf den Mengen U, S, T, E finden.

U: Die Ableitung von f ist $Df = (2x, 2y, 2z)$, doch der kritische Punkt $(0, 0, 0)$ liegt nicht in U. Es gibt also keine Extrema in U.

E: Wir wollen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + 9$ mit Nebenbedingung $x^2 + xy + y^2 = 20$ finden.

Die Lagrangefunktion ist

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 9 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 20).$$

Also wollen wir

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_x L = 2x - \lambda(2x + y) \\
0 &= \partial_y L = 2y - \lambda(x + 2y) \\
20 &= x^2 + xy + y^2
\end{aligned}$$

lösen. Subtrahieren wir die zweite Gleichungen vom Doppelten der ersten Gleichung, erhalten wir

$$4x - 2y - 3x\lambda = 0$$

und folgern

$$y = x\left(2 - \frac{3\lambda}{2}\right).$$

Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$0 = 2x - \lambda x \left(4 - \frac{3\lambda}{2}\right).$$

Wir sehen, dass $x = 0$ eine Lösung ist. Dann muss aber $\lambda = 0$ oder $y = 0$ sein mit der ersten Gleichung. Wir erhalten in beiden Fällen $y = 0$ mit der zweiten Gleichung. Dieser Punkt liegt aber nicht in der Ellipse E.

Anderenfalls erhalten wir durch Division von x, dass

$$0 = 2 - 4\lambda + \frac{3}{2}\lambda^2.$$

Also $\lambda = 2$ oder $\lambda = \frac{2}{3}$. Es folgt $y = -x$ oder $y = x$. Mit der letzten Gleichung erhalten wir entweder $x^2 = -y^2 = 20$ oder $3x^2 = 3y^2 = 20$. Die Extremwerte sind also

$$f(\sqrt{20}, -\sqrt{20}) = f(-\sqrt{20}, \sqrt{20}) = 49 \quad f\left(\sqrt{\frac{20}{3}}, \sqrt{\frac{20}{3}}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{20}{3}}, -\sqrt{\frac{20}{3}}\right) = \frac{67}{3}.$$

S: Wir erhalten die Lagrangefunktion

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 + 10z - 50).$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_x L = 2x - \lambda(2x + y) \\
0 &= \partial_y L = 2y - \lambda(x + 2y) \\
0 &= \partial_z L = 2z - 10\lambda \\
-10z + 50 &= x^2 + xy + y^2 \\
3 &< z
\end{aligned}$$

führt wieder (wie in der Rechnung für E) zur einen Lösung $x = 0$ und dann entweder $\lambda = 0$ oder $y = 0$ und es folgt mit der letzten Gleichung, dass $z = 5$ ist. Wir kriegen den Extremwert

$$f(0, 0, 5) = 25.$$

Falls $x \neq 0$, erhalten wir wie im Fall der Ellipse $\lambda = 2$ (also $y = -x$) oder $\lambda = \frac{2}{3}$ (also $y = x$). Aus der dritten Gleichung folgt $z = 5\lambda$, also $z = 10$ oder $z = \frac{10}{3}$.

Mit der letzten Gleichung finden wir entweder $x^2 = y^2 = -50$, welches keine Lösung hat, oder wir finden $3x^2 = 3y^2 = \frac{50}{3}$. Diese kritischen Punkte haben Wert

$$f(x, y, z) = \frac{50}{9} + \frac{50}{9} + \frac{100}{9} = \frac{200}{9}.$$

T: Analog erhalten die Lagrangefunktion

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 10z + 10).$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x L = 2x - \lambda(2x + y) \\ 0 &= \partial_y L = 2y - \lambda(x + 2y) \\ 0 &= \partial_z L = 2z + 10\lambda \\ 10z - 10 &= x^2 + xy + y^2 \\ 3 &> z \end{aligned}$$

führt wieder (wie in der Rechnung für E) zur einen Lösung $x = 0$ und dann entweder $\lambda = 0$ oder $y = 0$ und es folgt mit der letzten Gleichung, dass $z = 1$ ist. Wir kriegen den Extremwert

$$f(0, 0, 1) = 1.$$

Falls $x \neq 0$, erhalten wir wie im Fall der Ellipse $\lambda = 2$ (also $y = -x$) oder $\lambda = \frac{2}{3}$ (also $y = x$). Aus der dritten Gleichung folgt wieder $z = -5\lambda$, also $z = -10$ oder $z = -\frac{10}{3}$, welches keine Lösung mit der letzten Gleichung hat.

Wir schliessen, dass die minimale Distanz vom Ursprung zu E genau $\sqrt{1} = 1$ ist und die maximale Distanz $\sqrt{49} = 7$ beträgt. (Beachte, dass $\frac{67}{3}$ und $\frac{200}{9}$ beide kleiner als 49 sind).

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte

1P Norm im Quadrat ist stetig

1P Aussage: B ist kompakt

2P Begründung: B ist kompakt

1P Minimum und Maximum von stetigen Funktionen auf wird kompakten Mengen angenommen

(b) 4 Punkte

je 1P Beschreibung muss so vereinfacht wie möglich da stehen

(c) 21 Punkte

- 3 Punkte für U

  1P Ableitung von f

  1P Kritischer Punkt $(0,0,0)$.

  1P Folgerung, dass kein kritischer Punkt in U liegt

- 6 Punkte für E

  1P Lagrangefunktion

  2P Ableitung der Lagrangefunktion

  1P Kritische Punkte $(\sqrt{20}, -\sqrt{20}, 3)$ and $(-\sqrt{20}, \sqrt{20}, 3)$

  1P Kritische Punkte $\left(\sqrt{\frac{20}{3}}, \sqrt{\frac{20}{3}}, 3\right)$ and $\left(-\sqrt{\frac{20}{3}}, -\sqrt{\frac{20}{3}}, 3\right)$

  1P Berechnen der kritischen Werte mit f

- 6 punkte für S

  1P Lagrangefunktion

  2P Ableitung der Lagrangefunktion

  1P Kritischer Punkt $(0,0,5)$

  1P: Kritische Punkte $(x^2, y^2, z) = (\frac{50}{3}, \frac{50}{3}, \frac{10}{3})$

  1P: Berechnen der kritischen Werte mit f

- 6 Punkte für T

  1P Lagrangefunktion

  2P Ableitung der Lagrangefunktion

  1P Kritischer Punkt $(0,0,1)$

  1P Das sind alle kritischen Punkte auf T

  1P Berechnen des kritischen Wertes mit f

  Falls die Lagrangefunktionen sehr anders sind, können grosszügig noch Punkte für die Ableitungen geholt werden, aber keine Punkte für weitere Rechnung, da zu weit Weg.

Aufgabe 4. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x, y, z) = (z^2, y^2, x)$$

und sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ das ausgefüllte Dreieck mit Eckpunkten $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ und $C = (0, 0, 1)$, inklusive Rand. Der Satz von Stokes besagt, dass der Fluss von $\operatorname{rot}(F)$ durch S gleich dem Arbeitsintegral von F entlang dem Rand von S ist.

(a) Skizzieren Sie die Fläche S, zusammen mit einem normierten Normalenfeld welches in jedem Punkt negative z-Koordinate hat. Geben Sie in der Skizze auch eine zu diesem Normalenfeld kompatible Orientierung des Randes ∂S an.

Bitte nicht zu klein - brauchen Sie eine halbe A4 Seite. Verlieren Sie keine Zeit mit künstlerischen Details.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung $\psi : U \to S$ von S an, mit einem geeigneten Parameterbereich $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Stellen Sie dabei sicher, dass die Orientierung von S, die Sie durch ψ erhalten, mit der in (a) eingezeichneten Orientierung übereinstimmt.

(c) Berechnen Sie das Flussintegral $\int_S \operatorname{rot}(F)\, dn$ mit Hilfe der gewählten Parametrisierung.

(d) Geben Sie eine richtig orientierte Parametrisierung der Wege an, welche den Rand ∂S beschreiben, und berechnen Sie damit das Arbeitsintegral $\int_{\partial S} F\, dt$.

Lösung:

(a) Von oben gesehen ist der Rand im Uhrzeigersinn gegeben.

(b) Wir können die Fläche S durch

$$\Psi : D = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq s + t \leq 1\} \to \mathbb{R}^3$$

durch

$$\Psi(s, t) = (2 - 2s - 2t, t, s)$$

beschreiben.

(c) Die Rotation des Vektorfeldes F ist

$$\operatorname{rot}(F) = (0, 2z - 1, 0).$$

Der Normalenvektor ist gegeben durch

$$n = \Psi_s \times \Psi_t = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen also mit Fubini

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot}(F)\,dn &= \int_0^1 \int_0^{1-s} \Big\langle \big(0, 2s-1, 0\big), \big(-1,-2,-2\big) \Big\rangle \,dt\,ds \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-s} (2-4s)\,dt\,ds \\
&= \int_0^1 (2-4s)(1-s)\,dx \\
&= \int_0^1 (2-6s+4s^2)\,dx \\
&= 2-3+\frac{4}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(d) Wir parametrisieren den Rand ∂S durch die drei Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (2t, 1-t, 0), \\
\gamma_2(t) &= (2-2t, 0, t), \\
\gamma_3(t) &= (0, t, 1-t).
\end{aligned}$$

Wir berechnen das Linienintegral

$$\int_{\gamma_1} F\,dt = \int_0^1 \Big\langle \big(0, (1-t)^2, 2t\big), \big(2,-1,0\big) \Big\rangle \,dt = -\int_0^1 (1-t)^2\,dt = -\frac{1}{3}.$$

Analog

$$\int_{\gamma_2} F\,dt = \int_0^1 \Big\langle \big(t^2, 0, 2-2t\big), \big(-2,0,1\big) \Big\rangle \,dt = \int_0^1 (-2t^2+2-2t)\,dt = \frac{1}{3}$$

und

$$\int_{\gamma_3} F\,dt = \int_0^1 \Big\langle \big((1-t)^2, t^2, 0\big), \big(0,1,-1\big) \Big\rangle \,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$$

Also ist das gesuchte Wegintegral

$$\int_{\partial S} F\,dt = \int_{\gamma_1} F\,dt + \int_{\gamma_2} F\,dt + \int_{\gamma_3} F\,dt = \frac{1}{3}.$$

Punkteverteilung:

(a) 3 Punkte

1P Skizze

2P Normalenvektor in negative z-Richtung (Orientierung Rand wird ignoriert, Normalenfeld sollte aus parallelen Vektoren bestehen.)

(b) 4 Punkte

2P korrekter Definitionsbereich (1P falls Quadrat anstatt Dreieck und Formel sinnvoll)

1P Formel

1P richtige Orientierung

(c) 11 Punkte

2P Rotation

3P Normalenvektor

- **2P** für verkehrte Orientierung

2P Formel Integral

- **0P** nichts eingesetzt
- **0P** falls Normalenvektor normalisiert

4P Rechnung

- **-1P** für kleine Fehler
- **max 1P** als Folgefehler Integral viel einfacher, andere Grenzen zum Beispiel
- **0P** keine Folgefehler falls Parametrisierung zu falsch

(d) 12 Punkte

6P für Wegparametrisierungen (je 2P)

- **-1P** für kleine Fehler
- **max 5P** für falsche Orientierungen

6P für Rechnung der Integrale (je 2P)

- **-1P** für kleine Fehler
- **-2P** für grössere Fehler

Aufgabe 5. Sei $p \geq 1$ eine ganze Zahl, und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^{2p} + tx)\, dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass das obige Integral für jedes $t \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass f die folgende Differentialgleichung erfüllt.

$$(\bigstar) \qquad tu = 2p\, u^{(2p-1)}$$

(c) Berechnen Sie die Koeffizienten a_n der Taylor-Entwicklung von f.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

(d) Geben Sie eine Basis von Lösungen von ($\bigstar$) an. GI sagt Ihnen, dass es sinnvoll ist auch komplexwertige Funktionen als Lösungen in Betracht zu ziehen, insbesondere $t \mapsto f(\lambda t)$ für geeignete $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lösung:

(a) Man beachte, dass für $|x| \geq 1$ gilt $x^{2p} \geq x^2$ und darum

$$\exp(-x^{2p} + tx) = \exp(-x^{2p}) \exp(tx) \leq \exp(-x^2) \exp(tx) = \exp(-x^2 + tx).$$

Aus

$$x^2 - tx = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4}$$

folgt ausserdem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2+tx)\, dx = \exp\left(\frac{t^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left((-\left(x - \frac{t}{2}\right)^2\right) dx = \exp\left(\frac{t^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx$$

welches ein konvergierendes Integral ist. Aus dem Majorantenkriterium schliessen wir, dass das Integral in (a) für alle t konvergiert (Wir müssen keine Majorante auf für $|x| \leq 1$ finden, da die Funktion auf diesem Intervall stetig und darum integrierbar ist.

(b) Indem wir das Parameterintegral nach t ableiten, erhalten wir für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} tf(t) - 2pf^{(2p-1)}(t) &= t \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^{2p} + tx)\, dx - 2p \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p-1} \exp(-x^{2p} + tx)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (t - 2px^{2p-1}) \exp(-x^{2p} + tx)\, dx \\ &= \Big[\exp(-x^{2p} + tx)\Big]_{x=-\infty}^{\infty} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also die DGL ($\bigstar$) erfüllt ist.

(c) Die Ableitungen von f sind

$$f^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(-x^{2p} + tx)\, dx$$

und darum ist der n-te Taylorkoeffizient

$$a_n = f^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(-x^{2p})\, dx.$$

Weil der Integrand für ungerade n ungerade ist, folgt $a_{2m+1} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für gerade $n = 2m$ erhalten wir nach Substituition von $y = x^{2p}$, dass

$$\begin{aligned}
a_{2m} &= 2\int_0^{\infty} x^{2m} \exp(-x^{2p})\, dx \\
&= 2\int_0^{\infty} y^{\frac{m}{p}} \exp(-y) \frac{y^{\frac{1-2p}{2p}}}{2p}\, dy \\
&= \frac{1}{p}\int_0^{\infty} y^{\frac{m}{p}+\frac{1}{2p}-1} \exp(-y)\, dy \\
&= \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{m}{p} + \frac{1}{2p}\right) \\
&= \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{2m+1}{2p}\right),
\end{aligned}$$

wobei Γ die Gamma Funktion ist.

(d) Mit dem Hinweis Funktionen f_λ der Form $t \mapsto f(\lambda t)$ zu betrachten, erhalten wir mit $tf(t) = 2pf^{(2p-1)}(t)$, dass

$$2pf_\lambda^{(2p-1)}(t) = 2p\lambda^{2p-1} f^{(2p-1)}(\lambda t) = \lambda^{2p-1} t f(\lambda t).$$

Falls dies gleich $tf_\lambda(t)$ sein sollte, benötigen wir die Bedingung, dass $\lambda^{2p-1} = 1$ gilt, also eine $(2p-1)$-te Einheitswurzel ist. Dies gibt uns $2p-1$ Lösungen von ($\bigstar$). Man kann zeigen, dass sie unabhängig sind, in dem man benutzt, dass $\exp(\alpha t^2)$ unabhängig ist für verschiedene $\alpha \in \mathbb{C}$.

Punkteverteilung:

(a) 6 Punkte

2P korrekte Majorante

2P korrekte Anwendung des Majorantenkriteriums

2P Schlussfolgerung

(b) 9 Punkte

4P $f^{(2p-1)}(t) = \int x^{2p-1} e^{-x^{2p}+tx} dx$

- **1P** nach t ableiten (nicht nach x)
- **1P** Ableitung ins Integral hineinziehen
- **1P** erste Ableitung
- **1P** korrektes Schlussfolgern auf $f^{(2p-1)}$

3P korrektes Integrieren über x

- **1P** korrektes Aufstellen des Integrals
- **2P** korrekte Berechnung des Integrals
  - **1P** Ansatz oder Idee partieller Integration
  - **1P** Ausführung

2P Folgerung der Differentialgleichung von Integral

(c) 9 Punkte

4P $a_n = \int x^n e^{-x^{2p}} dx$

- **2P** $a_n = f^{(n)}(0)$ (Keine Punkte für $f^{(n)}(t)$, $f^{(n)}$ ohne Argument und nur einzelne a_i wie z.B. $a_0 = f(0)$, 1P für $f^{(n)}(t_0)$)
- **2P** $f^{(n)} = \int x^n e^{-x^{2p}} dx$

2P $a_{2m+1} = 0$

3P a_{2m}

- **1P** $\int_{-\infty}^{\infty} \to 2\int_0^{\infty}$
- **1P** das Erkennen der Γ-funktion
- **1P** korrektes Endresultat

(d) **Total 6P** für korrekte Basis der Lösungen der Differentialgleichung

3P korrekte Substitution von f_λ

1P Bedingung $\lambda^{2p-1} = 1$

1P Unabhängigkeit der Lösungen

1P Schlussfolgerung, dass es sich um eine Basis handelt