Frage 1. **[10 Punkte]** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

(a) Was besagt der Zwischenwertsatz für Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$?

(b) Was besagt der Mittelwertsatz für Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$?

(c) Was besagt der Mittelwertsatz für Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$?

Lösung:

(a) Falls f stetig ist, gibt es für alle $a < b \in I$ und c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.

(b) Falls f differenzierbar ist, gibt es für alle $a < b \in I$ ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(c) Falls f differenzierbar ist, $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$, dann existiert ein $t \in (0, 1)$, so dass für $\xi = x + th$ die Gleichung

$$f(x + h) - f(x) = Df(\xi)(h)(= \partial_h f(\xi))$$

erfüllt ist.

Punkteverteilung:

+4P/4P/2P:

-0P falls nicht für alle $a, b \in I$.

-1P falls stetig oder differenzierbar vergessen.

Frage 2. [**10 Punkte**] Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

(a) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst gleichmässig stetig, falls... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Geben Sie Beispiele stetiger Funktionen $f_1 : (0, 1) \to \mathbb{R}$ und $f_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die nicht gleichmässig stetig sind oder begründen Sie (in einem Satz oder verweisen Sie auf ein Resultat aus der Vorlesung), warum kein Beispiel existiert.

Lösung:

(a) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst gleichmässig stetig, falls es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in I$ gilt

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

gilt.

(b) Zum Beispiel $f_1(x) = \frac{1}{x}$. Es gibt aber kein solches f_2, da stetige Funktionen auf kompakten Intervallen automatisch gleichmässig stetig sind.

Punkteverteilung:

+3P/4P/3P:

Frage 3. [**10 Punkte**] Berechnen Sie die folgenden Integrale. *Nur die Antwort zählt.*

$$A = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx, \qquad B = \int_1^2 \frac{1}{2y-1} dy,$$

$$C = \int_{-1}^1 5x^3 \sin(x^2) dx, \qquad D = \int_0^\pi \sin x \cos(\cos x)) dx,$$

$$E = \int_0^1 e^{3x+1} dx.$$

Lösung:

(a)

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = 1 - [\log x]_0^1 = 1 - \log 2$$

(b)

$$\int_1^2 \frac{1}{2y-1} dy = \left[\frac{1}{2}\log(2y-1)\right]_1^2 = \frac{\log 3}{2}$$

(c) $C = 0$, weil der Integrand eine ungerade Funktion ist.

(d)

$$\int_0^\pi \sin x \cos(\cos x)) dx = [-\sin(\cos x)]_0^\pi = 2\sin 1$$

(e)

$$\int_0^1 e^{3x+1} dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(e^4 - e)$$

Punkteverteilung:

+2P/2P/2P/2P/2P: keine Teilpunkte

-0P falls $\log 1$ oder $\sin 1 - \sin(-1)$ nicht vereinfacht

Frage 4. [10 Punkte] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls Sie existieren. *Nur die Antwort zählt.*

$$A = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{\sin x}}{x}, \qquad B = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{1-\cos(x^2)},$$

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n, \qquad D = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2},$$

$$E = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sin x}.$$

Lösung:

(a)

$$\frac{\sqrt{\sin x}}{x} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\sqrt{\sin x}},$$

wobei der erste Term Grenzwert 1 hat und der zweite ∞ ist (bzw nicht existiert). Also $A = \infty$.

(b)

$$\frac{x^4}{1-\cos(x^2)} = \frac{x^4}{1-(1-\frac{1}{2}(x^2)^2 + O((x^2)^4))}$$

gibt im Grenzwert $B = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

(c)

$$\left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n} \longrightarrow e^{-2}$$

(d)

$$0 \leq \frac{\log(n!)}{n^2} = \frac{\log n + \log(n-1) + \ldots + 1}{n^2} \leq \frac{n\log n}{n^2}$$

Weil die rechte Abschätzung gegen Null geht, schliessen wir $D = 0$.

(e)

$$\frac{x}{x+\sin x} = \frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}$$

geht gegen 1, da $\sin x$ beschränkt ist und darum $\frac{\sin x}{x}$ gegen 0 geht.

Punkteverteilung:

+2P/2P/2P/2P/2P: keine Teilpunkte

Frage 5. **[10 Punkte]** Sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = (xy^2 + x, y + x).$$

(a) Berechnen Sie die totale Ableitung von f an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Begründen Sie mit einem Satz aus der Vorlesung, warum f lokal beim Punkt $(2, 3)$ invertierbar ist, dies aber bei $(1, 1)$ nicht gilt.

Lösung:

(a) Wir haben

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + 1 & 2xy \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Der Satz der Umkehrabbildung besagt das f lokal bei (x, y) invertierbar ist, falls $df(x, y)$ invertierbar ist. Wir haben Wir haben

$$df(2, 3) = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad df(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist f am lokal bei $(2, 3)$ invertierbar, aber nicht bei $(1, 1)$.

Punkteverteilung:

+5P/5P:

Frage 6. [10 Punkte] Sei $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Kurve mit Koordinaten $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= \partial_y H(\gamma(t)) \\ y'(t) &= -\partial_x H(\gamma(t)) \end{aligned}$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass die Funktion $H \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstant ist.

Lösung: Mit der Kettenregel finden wir

$$\frac{d}{dt}(H \circ \gamma)(t) = DH(\gamma(t))D\gamma(t) = \begin{pmatrix} \partial_x H(\gamma(t)) & \partial_y H(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Wenn wir die (Hamilton) Gleichungen für x' und y' einsetzen und das Matrixprodukt ausrechnen, finden wir $\frac{d}{dt}(H \circ \gamma)(t) = 0$, also ist $H \circ \gamma$ konstant.

Punkteverteilung:

+3P: Ableitung berechnen

+4P: Kettenregel korrekt (mit Matrixdimensionen korrekt)

+3P: Rechnung fertig plus Folgerung

Frage 7. [10 Punkte] Geben Sie explizit je ein Beispiel einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ an (welche nicht $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{R}^2$ ist). Falls es keine solche Menge gibt, begründen Sie in einem Satz warum. Definieren Sie die Menge! Nur Zeichnungen zählen nicht. Beachten Sie auch das $A \subseteq \mathbb{R}^2$ nicht $A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) A ist abgeschlossen und nicht beschränkt.

(b) A ist nicht offen und nicht abgeschlossen.

(c) A ist offen und abgeschlossen.

(d) A ist zusammenhängend und nicht kompakt.

(e) A ist zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend.

Lösung: Zum Beispiel

(a) $A = \{0\} \times [0, \infty)$

(b) $A = \{0\} \times [0, 1)$

(c) Gibt es nicht, da $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend ist und A nicht $\mathbb{R}^2$ und $\emptyset$ sein darf.

(d) $A = \{0\} \times [0, \infty)$

(e) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Punkteverteilung:

+2P/2P/2P/2P/2P: keine Teilpunkte

Frage 8. [10 Punkte] Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heisst konvergent, falls... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heisst absolut konvergent, falls... (Ergänzen Sie die Definition)

(c) Konvergiert die folgende Reihe? Konvergiert sie absolut?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Nennen Sie die Konvergenzsätze mit Namen, die Sie verwenden.

Lösung: Zum Beispiel

(a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heisst konvergent, falls es ein $A \in \mathbb{R}$ gibt, so dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| < \epsilon$ für alle $N \geq N_0$.

(b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heisst absolut konvergent, falls es ein $A \in \mathbb{R}$ gibt, so dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\left|\sum_{n=0}^{N} |a_n| - A\right| < \epsilon$ für alle $N \geq N_0$.

(c) Sie konvergiert nach dem Leibnitzkriterium, da $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ monoton fallend ist und gegen Null strebt. Sie konvergiert aber nicht absolut, da

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Die harmonische Reihe konvergiert nicht. Nach dem Weierstrass Kriterium, divergiert darum auch

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Punkteverteilung:

+2P Die Partialsummen müssen in der Definition enthalten sein.

+2P

+3P+3P Beim Leibniz Kriterium -1 für vergessene Kriterien

Frage 9. [**10 Punkte**] Betrachten Sie das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und den Pfad $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = \left(ye^x, 2z\sin(x), x^2 + \sin(2z)\right), \qquad \gamma(t) = \left(t^2, 1, t\right).$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma F dt$.

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_\gamma F dt &= \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle dt = \int_0^1 \left(e^{t^2} \cdot 2t + 2t\sin(t^2) \cdot 0 + (t^4 + \sin 2t) \cdot 1\right) dt \\ &= \left[e^{t^2} + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^1 = e - 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}(1 - \cos 2)\end{aligned}$$

Also $\int_\gamma F dt = e - \frac{3}{10} - \cos 2$.

Punkteverteilung:

+3P Wegintegralformel (2P) + richtig eingesetzt (1P)

+7P Integration korrekt (-1P pro Fehler)

Frage 10. [10 Punkte] Sei $T \subseteq \mathbb{R}^3$ der geometrische Körper, der entsteht, wenn ein Kreis in der xz-Ebene mit Mittelpunkt $(2,0)$ und Radius 1, um die z-Achse gedreht wird. Dieser Körper wird Torus genannt.

Parametrisieren Sie diesen Körper und geben Sie das Integral an, das dessen Fläche berechnet (den Integrand, so weit es geht, vereinfachen, aber ohne das Integral zu berechnen müssen).

Lösung: Eine mögliche Parametrisierung ist $\Psi : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$\Psi(\phi,\theta) = (2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta).$$

Das Integral, welches die Oberfläche berechnet, ist

$$\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} ||\partial_\theta\Psi \times \partial_\phi\Psi|| d\theta d\phi,$$

where

$$\partial_\theta\Psi \times \partial_\phi\Psi = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -(2+\cos\theta)\sin\phi \\ (2+\cos\theta)\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta(2+\cos\theta)\cos\phi \\ -\cos\theta(2+\cos\theta)\sin\phi \\ \sin\theta(2+\cos\theta) \end{pmatrix}$$

Darum ist

$$||\partial_\theta\Psi \times \partial_\phi\Psi|| = 2+\cos\theta$$

und

$$\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} ||\partial_\theta\Psi \times \partial_\phi\Psi|| d\theta d\phi = 2\pi\int_0^{2\pi}(2+\cos\theta)d\theta = 2\pi[2\theta+\sin\theta]_0^{2\pi} = 8\pi^2$$

Punkteverteilung:

+2P: Parametriesierung Kreis $(\cos t + 2, \sin t)$ (Nur Implizite Formel Kreis keine Punkte)

+5P: Implizite Formel Torus (2P für guten Versuch)

+7P: Parametrisierung Torus (4P für guten Versuch,2P für schlechten Versuch)

Frage 11. [10 Punkte] Wir wollen den Schwerpunkt eines Achtels der Einheitskugel

$$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1;\;\; x, y, z \geq 0\Big\}$$

bestimmen. Erinnerung: Der Schwerpunkt $S = (S_x, S_y, S_z) \in \mathbb{R}^3$ eines Körpers E ist gegeben durch

$$S_x = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)} \int_E x dx dy dz$$

und analog S_y und S_z. Berechnen Sie aus Symmetriegründen nur S_x und verwenden Sie (ohne Berechnung), dass das Volumen der ganzen Kugel $\frac{4\pi}{3}$ ist.

Lösung: Wir parametriesieren den Körper E mit $\Psi : [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, R]$ durch Kugelkoordinaten

$$\Psi(r, \phi, \theta) = (r \cos\phi \sin\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \sin\theta).$$

Wir haben $\mathrm{Vol}(E) = \frac{1}{8}\frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Also ist

$$\begin{aligned}
S_x =& \frac{6}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cos\phi \sin\theta r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
=& \frac{6}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi d\phi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr \\
=& \frac{6}{\pi} [\sin\phi]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [1/2(\theta - \cos\theta\sin\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [r^4/4]_0^1 \\
=& \frac{6}{\pi}\frac{\pi}{4}\frac{1}{4} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Punkteverteilung:

+3P: Parametrisierung (-2P für falsche Grenzen)

+2P: Kugeltransformation

+5P: Rechnung (-1P für ganze anstatt 8tel Kugel, -1P für kleine Fehler)

Frage 12. [**10 Punkte**] Sie werden von einem Freund (versteht Mathe auf Gymnasialniveau) mit

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = i \cdot i = i^2 = -1$$

konfrontiert. Erklären Sie in 3-4 Sätzen, was die Problematik ist.

Lösung: Wie definiert man eine Wurzel $\sqrt{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$? In Polarkoordinaten kann eine komplexe Zahl als $z = re^{i\phi}$ beschrieben werden. Um den Winkel ϕ zu messen müssen wir uns auf ein Intervall I der Länge 2π beschränken. Definiere $\arg(z) = \phi$. Daher kommt nur $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\phi/2}$ (oder $\sqrt{z} = -e^{i\phi/2} = e^{i\phi/2+i\pi}$) in Frage. Wir nehmen an, dass $0 \in I$ ist. Dann folgt

$$\arg(\sqrt{z}) = \arg(z)/2.$$

Wir wollen ausserdem, dass $\sqrt{1} = 1$ ist (dann fällt die Option $\sqrt{z} = -e^{i\phi/2}$ weg). Seien nun

$$z_1 = r_1 e^{i\arg(z_1)} \qquad \text{und} \qquad z_2 = r_2 e^{i\arg(z_2)}.$$

Dann ist

$$\arg(\sqrt{z_1 z_2}) = \frac{\arg(z_1 z_1)}{2} \qquad \text{und} \qquad \arg(\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}) = \arg(z_1)/2 + \arg(z_2)/2.$$

Das Problem ist aber, dass

$$\arg(z_1 z_1) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

nicht immer wahr ist, da $\arg(z_1) + \arg(z_2)$ ausserhalb des Definitionbereiches I landen könnte und dann $\arg(z_1 z_1) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pm 2i\pi$ ist. Also ist $\arg(\sqrt{z_1 z_2})$ um π verschoben zu $\arg(\sqrt{z_1}\sqrt{z_2})$. Falls wir zum Beispiel $I = [0, 2\pi]$ haben, sieht das ganze in Polarkoordinaten wie folgt aus:

$$e^{i0} = e^{i\frac{0}{2}} \neq e^{\frac{i\pi + i\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1.$$

Punkteverteilung: Maximal 10 Punkte aus

+3P: Eindeutigkeit der Wurzel in $\mathbb{C}$, Wurzelzweig

+3P: Wurzel in $\mathbb{C}$ ist nicht stetig

+5P: Erkenntnis $\sqrt{z_1 z_2} \neq \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$, (nur $\sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1}$ 3P)

+5P: Erklärung ist: $\arg(z_1 z_1) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ ist nicht immer wahr

Frage 13. [10 Punkte] Wir schreiben die Funktion $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ als Taylor-Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3. *Nur die Antwort zählt.*

Lösung: Die Funktion cos um 0 entwickelt ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4).$$

Die Wurzelfunktion um 1 entwickelt ist

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + O(y^2).$$

Also ist

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)} = 1 - \frac{x^2}{4} + O(x^4).$$

Also ist $a_0 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = -\frac{1}{4} \qquad a_3 = 0$

Punkteverteilung:

+2P/2P/3P/3P: keine Teilpunkte

0P falls Variable a_i als Funktion von x steht.

Frage 14. [10 Punkte] Für $\alpha > -1$ kennen wir das Integral

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Leiten Sie daraus den Wert für das Integral

$$\int_0^1 \log(x)^2 x^3 dx$$

her. (Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung nach α, begründen Sie ihre Schritte).

Lösung: Wir leiten die erste Gleichung ab und erhalten

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^1 x^\alpha dx = \int_0^1 \frac{d}{d\alpha} x^\alpha dx = \int_0^1 \log(x) x^\alpha dx \stackrel{!}{=} -\frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

Wir dürfen Integral und Ableitung vertauschen, da die partielle Ableitung von x^α nach α stetig ist. Und ein weiteres Mal Ableiten ergibt

$$\int_0^1 \log(x)^2 x^\alpha dx \stackrel{!}{=} \frac{2}{(\alpha+1)^3}.$$

Also haben wir für $\alpha = 3$ genau

$$\int_0^1 \log(x)^2 x^3 dx = \frac{1}{32}$$

Punkteverteilung:

+3P Rechte Seite richtig nach α ableiten (einmal Ableiten 2P)

+5P Linke Seite richtig nach α ableiten (einmal Ableiten 3P)

+1P Parameterintegral, Begründung Integral und Ableitung vertauschen (grosszÃ$\frac{1}{4}$gig)

+1P Schlussfolgerung

Alternative:

+2P Versuch Partielle Integration

Frage 15. [10 Punkte]

(a) Was besagt der Satz von Green?

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Einheitsballes $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$ mit Hilfe des Satzes von Green und dem Vektorfeld $F(x, y) = (-y, x)$.

Lösung:

(a) Sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann gilt für jeden glatt berandeten, kompakten Bereich $B \subset U$:

$$\int_B rot(F)dx = \int_{\partial B} F dt.$$

(b) Das Flächenintegral ist

$$\int_B rot(F)dx = \int_B 1 + 1dx = 2Vol(B).$$

Parametrisieren wir den Rand durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ erhalten wir

$$\int_{\partial B} F dt = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} \Big((-\sin(t))(-\sin(t)) + \cos t \cos t\Big) dt = 2\pi.$$

Thus $Vol(B) = \pi$.

Punkteverteilung:

+3P Satz von Green (-1P für kompakt oder stetig diffbar vergessen, total 0P falls nicht gesagt wird, was B und F ist.)

+1P Rot von F berechnen

+1P Integral mit Rot berechnen ($= 2VolB$)

+1P Parametrisierung Rand

+3P Integral über Rand

+1P Folgerung

max 5P: falls Volumen direkt berechnet.

Aufgabe 1. [30 Punkte]

(a) Definieren Sie, was eine Cauchy-Folge in einem metrischen Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass Cauchy-Folgen beschränkt sind.

(c) Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig und $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge im metrischen Raum $(0,1)$. Zeigen Sie, dass $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ dann eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Aussage aus (c) nicht stimmt, falls wir nur annehmen, dass f stetig ist.

(e) Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge ist (und darum konvergiert).

Lösung:

(a) Eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in einem metrischen Raum (X,d) ist eine CauchyFolge, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in N$ gibt, so dass $d(x_m, x_n) < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$ gilt.

(b) Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge. Sei $N \in \mathbb{N}$ gross genug, so dass $d(x_m, x_n) < 1$ für alle $m, n \geq N$ gilt. Setze

$$M = \max\{1, d(x_0, x_N), d(x_1, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N)\}.$$

Dann ist $d(x_n, x_N) \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ darum beschränkt.

(c) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen gleimässiger Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ ist, für alle $x, y \in (0,1)$ mit $|x - y| < \delta$. Weil $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N \in N$, so dass $d(a_m, a_n) < \delta$ für alle $m, n \geq N$ gilt. Darum gilt auch $|f(a_n) - f(a_m)| < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$, das heisst $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ ist Cauchy.

(d) Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$ und $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definiert durch $a_n = \frac{1}{n} \in (0,1)$. Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ist Cauchy aber $f(a_n) = n$ ist nicht Cauchy. (Da sie nicht konvergiert).

(e) Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ konvergiert. Sei $\epsilon > 0$. Wegen Konvergenz der Reihe, gibt es ein N, so dass $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| < \epsilon$. Für $n, m \geq N$

(OBdA $m \geq n$) haben wir

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a_{n+1}| + \ldots + |a_{m-1} - a_m| \leq \sum_{n'=N}^{\infty} |a_{n'} - a_{n'+1}| < \epsilon.$$

Darum ist $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ Cauchy.

Punkteverteilung:

(a) 2P (-1 für Ungenauigkeiten, zum Beispiel $|\cdot|$ anstatt d)

(b) 7P

(c) 7P (3P + 3P für glm Stetigkeit und Verknüpfung mit Cauchy Folge, 1 für Beweisführung)

(d) 7P (4 für Beispiel, 3 für Begründung, Nur 1P falls begründet, dass Stetigkeit nicht genug)

(e) 7P (3 für Cauchy Kriterium)

Allgemein

* max 4P für korrigierten Beweis

* -1P für Ungenauigkeit

Aufgabe 2. [30 Punkte]

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *stetig*, falls ... (Geben Sie die topologische Definition und die Definition durch Grenzwerte an. Also keine ϵ-δ Definition.)

(b) Der Abschluss $\overline{B} \subseteq \mathbb{R}$ einer Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ ist definiert als ... (Es gibt verschiedene äquivalente Definitionen. Für Teilaufgabe c) ist die Definition durch Grenzwerte am besten geegnet. Sie dürfen aber auch eine andere Definition benutzen.)

(c) Zeigen Sie: Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$ für alle $B \subseteq \mathbb{R}$.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *offen*, falls das Bild $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}$ auch offen ist.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *abgeschlossen*, falls das Bild $f(C) \subseteq \mathbb{R}$ für alle abgeschlossenen Mengen $C \subseteq \mathbb{R}$ auch abgeschlossen ist.

(d) Zeigen Sie: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\overline{f(B)} \subseteq f(\overline{B})$ für alle Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}$ gilt.

(e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion, so dass das Bild $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass f abgeschlossen ist, falls f offen ist.

(f) Geben Sie (ohne Beweis) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche abgeschlossen aber nicht offen ist.

(g) Geben Sie (ohne Beweis) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche offen aber nicht abgeschlossen ist.

(h) Geben Sie (ohne Beweis) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche weder offen noch abgeschlossen ist.

Lösung:

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *stetig*, falls das Urbild offener Mengen wieder offen ist oder falls für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert x gilt, dass $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und Grenzwert $f(x)$ hat.

(b) $x \in \mathbb{R}$ ist in $\overline{B}$ genau dann wenn es eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in B gibt mit Grenzwert x.

(c) Sei $a \in f(\overline{B})$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in B mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) = a$. Wegen Stetigkeit ist $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ eine Folge (in $f(B)$), welche ausserdem gegen $f(x) = a$ konvergiert. Darum ist $a \in \overline{f(B)}$.

(d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abgeschlossen. Wir haben

$$\overline{f(B)} \subseteq \overline{f(\overline{B})} = f(\overline{B}),$$

weil $B \subseteq \overline{B}$ ist. Die Gleicheit folgt, da $\overline{B}$ abgeschlossen ist und f abgeschlossen ist.

Falls

$$\overline{f(B)} \subseteq f(\overline{B}),$$

für alle $B \subseteq$ erfüllt ist und C abgeschlossen ist, folgt

$$\overline{f(C)} \subseteq f(\overline{C}) = f(C).$$

Darum ist $f(C)$ abgeschlossen. Da C beliebig war, finden wir f ist abgeschlossen.

(e) Weil f injektiv ist, haben wir für alle Teilmengen $C \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \setminus f(C) = (\mathbb{R} \setminus f(\mathbb{R})) \cup f(\mathbb{R} \setminus C).$$

Falls nun f offen ist und $f(\mathbb{R})$ abgeschlossen, gilt für abgeschlossene Mengen $C \subseteq \mathbb{R}$, dass $\mathbb{R} \setminus C$ offen ist und darum $(\mathbb{R} \setminus f(\mathbb{R})) \cup f(\mathbb{R} \setminus C)$ eine Vereinigung zwei offener Mengen ist. Darum ist $\mathbb{R} \setminus f(C)$ offen und $f(C)$ abgeschlossen. Dies beweist, dass f abgeschlossen ist.

(f) $f(x) = x^2$, da $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ nicht offen ist.

(g) $f(x) = \arctan(x)$, da $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nicht abgeschlossen ist.

(h) $f(x) = \arctan(x^2)$, da $f(\mathbb{R}) = [0, \frac{\pi}{2})$ weder offen noch abgeschlossen ist.

Punkteverteilung:

(a) 4P (-1P fall nicht gesagt, dass $f(x_n)_n$ konvergiert.)

(b) 3P

(c) 5P

(d) 6P (Ansatz 2P)

(e) 6P (Ansatz 2P)

(f) 2P

(g) 2P

(h) 2P

Aufgabe 3. [30 Punkte] Sei $a > 0$ ein reeller Parameter und sei E^a die Menge gegeben durch

$$E^a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{\frac{2}{a}} + |y|^{\frac{2}{a}} \leq 1\}.$$

(a) Zeichnen Sie E^1 und E^2.

(b) Wie sieht die Menge E^a im Grenzwert $a \to 0$ beziehungsweise für $a \to \infty$ aus?

(c) Parametrisieren Sie den Rand von E^a durch eine Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von a. (Tipp: Betrachten Sie zuerst den Fall $a = 1$ und verallgemeineren Sie dann)

(d) Geben Sie die Definition der Länge einer Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$.

Sei $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ die Funktion $a \mapsto \text{Umfang}(E^a)$, welche den Umfang von E^a beschreibt.

(e) Geben Sie die Funktion f explizit an, (Integrale müssen Sie nicht ausrechnen, vereinfachen Sie den Integrand aber so weit wie möglich).

(f) Begründen Sie kurz: Ist f stetig, differenzierbar?

(g) Beschreiben Sie die Extrema von f und das Verhalten von $f(a)$ für $a \to 0$ beziehungsweise $a \to \infty$ anhand von geometrischen Überlegungen, nicht anhand von direkten Rechnungen.

(h) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösung:

(a) Einheitsball, Raute in Einheitskreis.

(b) Einheitsquadrat, Achsen innerhalb des Einheitskreis.

(c) ∂E^1 ist der Einheitskreis, parametrisiert durch $\gamma^1(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Allgemein für ∂E^a können wir den Abschnitt im ersten Quadranten $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ schreiben als $\gamma^a(t) = (\cos^a t, \sin^a t)$. Um keine Wurzeln negativer Zahlen zu ziehen, ist die gesamte Parametrisierung gegeben durch

$$\gamma^a(t) = (\text{sgn}(\cos t)|\cos t|^a, \text{sgn}(\sin t)|\sin t|^a),$$

wobei $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

(d) Die Länge einer Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||dt.$$

(e) Wir haben aus Symmetriegründen:

$$f(a) = L(\gamma^a) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ||\dot{\gamma}^a(t)||dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{\sin^2 t \cos^{2(a-1)}(t) + \cos^2 t \sin^{2(a-1)}(t)}dt.$$

(f) f ist stetig und differenzierbar (man kann die Ableitung ins Integral ziehen)

(g) f hat ein Minimum bei $a = 2$, da der Umfang dort von E^2 am kürzesten ist. Wir haben

$$f(2) = 4\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad \lim_{a\to 0} f(a) = \lim_{a\to\infty} f(a) = 4 \cdot 2.$$

Punkteverteilung:

(a) 4P

(b) 4P

(c) 6P Parametrisierung Kreis (1P), Parametrisierung erster Quadrant (3P), Definitionsbereich nicht angegeben (-1P)

(d) 3P Definition ohne Betrag (1P), falsche Grenzen (-1P)

(e) 4P Idee (1P), pro Fehler (-1P)

(f) 3P Ableitung und Integral vertauschen.

(g) 4P

(h) 2P

Aufgabe 4. [30 Punkte] Es bezeichne $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ die Menge aller 2 Mal 2 Matrizen mit reellen Koeffizienten. Indem wir Matrizen als 4 Mal 1 Spaltenvektoren schreiben, können wir $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^4$ identifizieren. Also

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Sei $F : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ die Funktion gegeben durch

$$F(A) = AA^T,$$

wobei A^T die transponierte Matrix von A ist.

(a) Mit der Identifikation von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^4$ schreiben Sie die Abbildung in Koordinaten hin und begründen Sie, warum F eine glatte Funktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Bild von F im Vektorraum der symmetrischen Matrizen liegt.

(c) Berechnen Sie die Jacobi Matrix von F am Punkt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Lösung ist eine Matrix in $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$.

Wir definieren die Menge der orthogonalen Matrizen $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ als

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : F(A) = Id\},$$

wobei $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ die Identitätsmatrix bezeichnet.

(d) Zeigen Sie, dass der Rang der Jacobimatrix an Punkten $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ gleich 3 ist.

(e) Was besagt der Satz vom konstanten Rang allgemein?

(f) Schliessen Sie mit Hilfe des Satzes vom konstanten Rang, dass $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ ist. Von welcher Dimension ist sie?

(g) Wie können Sie den Tangentialraum am Punkt $Id \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ aus der Jacobi Matrix von Aufgabe (c) bestimmen? Geben Sie eine Basis an.

Lösung:

(a)

$$f(A) = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

besteht nur aus Polynomfunktionen und ist daher glatt.

(b) Aus Teilaufgabe (a) oder mit $(AA^T)^T = AA^T$.

(c)

$$DF(A) = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 0 & 0 \\ c & d & a & b \\ c & d & a & b \\ 0 & 0 & 2c & 2d \end{pmatrix}.$$

(d) Mit $a^2 + b^2 = 1$ folgt aus $b = 0$, dass $a = 1$, $d = 0$, $c = 1$. Dann ist der Rang offensichtlich gleich 3. Falls $b \neq 0$ ist, haben wir eine invertierbare Teilmatrix

$$\begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 \\ d & a & b \\ 0 & 2c & 2d \end{pmatrix},$$

da $ad - bc \neq 0$ ist. Also hat die ursprüngliche Matrix Rang 3.

(e) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $F : U \to R^m$ eine glatte Funktion. Sei $q \in \mathbb{R}^m$ und $M = \{p \in U | F(p) = q\}$ ist eine $(n-m)$ dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, falls für alle $p \in M$ die lineare Abbildung $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist.

(f) Da $F : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ surjektiv ist und Id ein regulärer Wert ist, ist $O_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : F(A) = Id\}$ eine Teilmannigfaltigkeit von Dimension 1.

(g) Der Tangentialraum bei $Id \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$\ker(dF(Id)) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies entspricht der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

als Basis.

Punkteverteilung:

(a) 3P Form (1P) und glatt (2P)

(b) 2P keine Teilpunkte

(c) 5P pro Fehler (-1P)

(d) 8P $b = 0$ (2P), Rang kleiner als 3 (2P), weitere Punkteverteilung in 2er Schritten

(e) 3P glatt, Dimension, surjektiv vergessen (-1P)

(f) 3P regulärer Wert, surjektiv, Dimension je 1P

(g) 6P Kern betrachten und richtige Matrix (3P), Lösung (3P) und richtige Lösung falscher Matrix (-2P)