Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Peter S. Jossen

15. August 2019

Analysis I & II Prüfung - Teil A

CHAB | ITET | MATH | PHYS

Name: ....

Legi-Nr.: ....

Anleitungen für Teil A (120 Minuten)

- Schreiben Sie alle Antworten auf diese Blätter, es werden keine weiteren Blätter eingesammelt! Bitte lassen Sie diese Blätter zusammengeheftet.
- Sie dürfen Notizpapier verwenden.
- Falls Sie vor 9:45 fertig sind, legen Sie den Prüfungsteil A ins Kuvert zurück, und verlassen stillschweigend den Saal. Nach 9:45 bleiben Sie bitte bis zum Ende des ersten Prüfungsteils an Ihrem Platz.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle
1	[8]		**6**	[8]		**11**	[8]	
2	[8]		**7**	[8]		**12**	[8]	
3	[8]		**8**	[8]		**13**	[8]	
4	[8]		**9**	[8]		**14**	[8]	
5	[8]		**10**	[8]		**15**	[8]	

Gesamtpunktzahl:	[120]

Frage 1. [8 Punkte] Was besagt der Banach'sche Fixpunktsatz? (Hinweis: Falls Sie jetzt etwas über X und d schreiben, so dürfen Sie nicht vergessen, dazu zu sagen, was X und d sind!)

Frage 2. [**8 Punkte**]

(a) Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ heisst Lipschitz-stetig falls... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die nicht Lipschitz-stetig ist an. Erklären Sie Ihre Antwort in einem Satz (ohne Rechnungen).

Frage 3. [**8 Punkte**] Berechnen Sie die folgenden Integrale. *Nur die Antwort zählt.*

$$A = \int_0^1 \sin(5x+1)dx, \qquad B = \int_1^2 \frac{1+y}{y}dy,$$

$$C = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}dx, \qquad D = \int_{-1}^1 x\cos(x^5)dx.$$

Frage 4. [**8 Punkte**] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls Sie existieren. *Nur die Antwort zählt.*

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x + x}{\log x + x}, \qquad B = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x - 1},$$

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}, \qquad D = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n!}}.$$

Frage 5. [**8 Punkte**] Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3, x_1 x_2 x_3)$. Wir schreiben $Df(x)$ für die totale Ableitung von f an der Stelle $x \in \mathbb{R}^3$. Berechnen sie

$$Df(x)(v)$$

für den Vektor $v = (1, 2, a)$, wobei $a \in \mathbb{R}$ ein fixer Parameter ist. *Nur die Antwort zählt.*

Frage 6. [8 Punkte] Seien $n, m \geq 1$ ganze Zahlen und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbare Funktionen. Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$\varphi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarpodukt auf $\mathbb{R}^m$ ist. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $v \in \mathbb{R}^n$

$$D\varphi(x)(v) = \langle Df(x)(v), g(x) \rangle + \langle f(x), Dg(x)(v) \rangle$$

gilt. Erklären Sie, was sie tun und welche Sätze Sie verwenden.

Frage 7. [**8 Punkte**] Definieren und zeichnen Sie eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ die zussammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend ist (ohne dies zu beweisen). *Zeichnung ohne Definition zählt nicht.*

Frage 8. [**8 Punkte**]

(a) Definieren Sie den Konvergenzradius einer Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$T + 4T^4 + 9T^9 + 16T^{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 T^{n^2}.$$

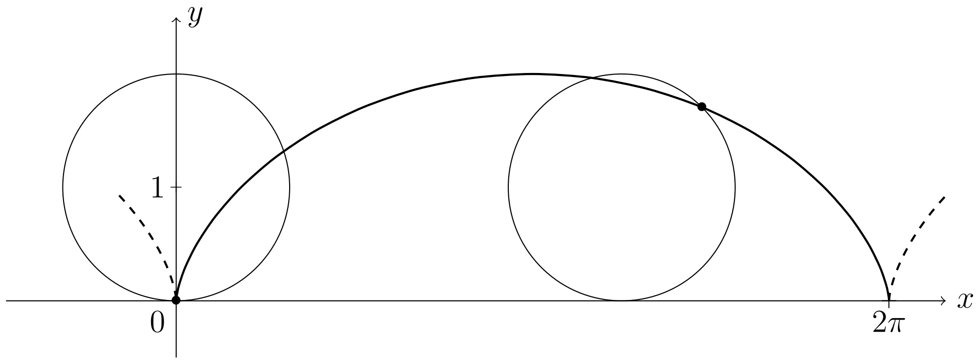
Falls Sie dabei ein Resultat über Konvergenzradien aus der Vorlesung benutzen, so schreiben Sie die vollständige Aussage dieses Resultats auf.

Frage 9. [8 Punkte] Betrachten Sie das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und den Pfad $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = (\sin x, 1, xyz), \qquad \gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

Berechnen Sie das Pfadintegral $\int_\gamma F dt$.

Frage 10. [8 Punkte] Als Zykloide bezeichnen wir die Kurve in der Ebene, die ein mit dem Kreis vom Radius 1 starr verbundener Punkt P beschreibt, wenn dieser Kreis auf einer Geraden abrollt.



Parametrisieren Sie die in der Graphik gezeichnete Zykloide als Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit Anfangspunkt $\gamma(0) = (0, 0)$ und Endpunkt $\gamma(1) = (2\pi, 0)$, und schreiben Sie die Länge von γ als ein explizites Integral.

Frage 11. [**8 Punkte**] Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_E \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}},$$

wobei $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 2z\}$.

Frage 12. [**8 Punkte**] Sie werden von einem Freund (studiert mittelalterliche Literatur an der Uni, möchte später auch mal bei Starbucks arbeiten) gefragt, wie viel

$$i^{\sqrt{2}}$$

ist. Erklären Sie in 3-4 Sätzen die Problematik bei so einem Ausdruck, und wie man ihn möglicherweise interpretieren kann.

Frage 13. [**8 Punkte**] Wir schreiben die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \cos(x^2 + x)$ als Taylor-Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3. *Nur die Antwort zählt.*

Frage 14. [8 Punkte] Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$:

$$xu''(x) + 2u'(x) + \omega^2 xu(x) = 0,$$

wobei $\omega > 0$ eine fixe Konstante bezeichnet. Finden Sie alle beschränkten Lösungen dieser Differentialgleichung. *Hinweis: betrachten Sie die Funktion* $v(x) = x\,u(x)$.

Frage 15. [**8 Punkte**] Was besagt das Zorn'sche Lemma?

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Peter S. Jossen

15. August 2019

Analysis I & II Prüfung - Teil B

CHAB | ITET | MATH | PHYS

Name: ....

Legi-Nr.: ....

Anleitungen für Teil B (120 Minuten)

- Lesen Sie alle fünf Aufgaben aufmerksam durch. Entscheiden Sie sich anschliessend für *eine* Aufgabe, die sie *nicht* machen möchten.

Folgende Aufgabe mache ich nicht: ☐

- Lösen Sie die anderen vier Aufgaben auf separaten Blättern. Bitte numerieren Sie Ihre Blätter und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Am Ende der Prüfung werden Ihre Blätter zusammengeheftet. Bitte achten Sie auf die richtige Reihenfolge. Legen Sie anschliessend Teil B ins Kuvert, und geben Sie das Kuvert ab.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle
	[30]	
	[30]	
	[30]	
	[30]	

Gesamtpunktzahl:	[120]

Aufgabe 1. [30 Punkte] Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Definieren Sie: Eine *Norm* auf V ist ...

(b) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Definieren Sie: V ist *vollständig* falls ...

(c) Geben Sie ein Beispiel für einen *nicht vollständigen* normierten Vektorraum. Beweisen Sie Ihre Aussage.

(d) Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und V der Vektorraum aller reellwertigen stetigen Funktionen auf I. Definieren Sie die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf V. Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ tatsächlich eine Norm ist.

(e) Seien V und $\|\cdot\|_\infty$ wie in **(d)**. Beweisen Sie, dass V vollständig ist.

Aufgabe 2. [30 Punkte] Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge.

(a) Definieren Sie: A ist *offen* falls ..., und geben Sie ein Beispiel für eine nichtleere, offene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ an.

(b) Definieren Sie: A ist *abgeschlossen* falls ..., und geben Sie ein Beispiel für eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ an.

(c) Geben Sie verschiedene Charakterisierungen von: A ist *kompakt* falls ... (ohne Beweis dass diese äquivalent sind). Geben Sie ein Beispiel für eine nichtleere, kompakte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ an.

Für Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und $B \subseteq \mathbb{R}^2$ schreiben wir $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie, in dem Sie eine geeignete Charakterisierung von Kompaktheit aus (3) benutzen:

(d) Ist A offen oder B offen, so ist $A + B$ offen.

(e) Ist A abgeschlossen und B kompakt, so ist $A + B$ abgeschlossen.

(f) Sind A und B kompakt, so ist $A + B$ kompakt.

Aufgabe 3. [30 Punkte] Die Teilmenge

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \text{ und } z \geq 0\}$$

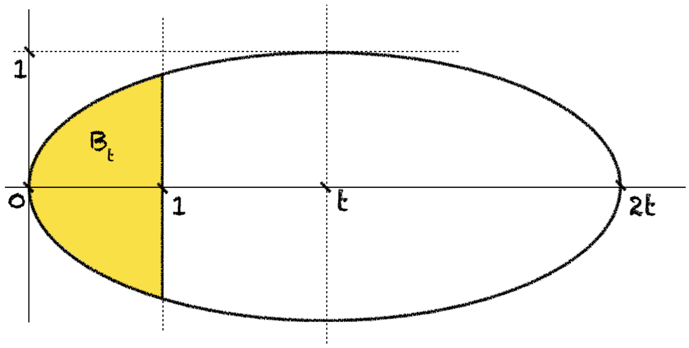
von $\mathbb{R}^3$ ist die obere Hälfte der vollen, abgeschlossenen Kugel mit Zentrum 0 und Radius 3. Für einen fixen reellen Parameter $c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die durch

$$f(x, y, z) = x + 2y + cz^2$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle globalen Maxima der Funktion f auf H: Wo auf H nimmt die Funktion f ihren maximalen Wert an, und was ist dieser Wert? Erklären Sie dabei in vollständigen Sätzen was Sie tun, und warum. Strukturieren Sie Ihre Lösung gut, und seien Sie insbesondere präzise bei möglichen Fallunterscheidungen. Bitte benutzen Sie folgende Notation, falls nötig:

$$\begin{aligned} U &= \text{das Innere von } H \\ S &= \text{die halbe Sphäre } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9, z > 0\} \\ D &= \text{die Kreisscheibe } \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 9\} \\ C &= \text{der Kreis } \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\} \end{aligned}$$

Aufgabe 4. [30 Punkte] Für eine reelle Zahl $t > 0$ bezeichne $E_t \subseteq \mathbb{R}^2$ die achsenparallele Ellipse mit Zentrum t auf der x-Achse, horizontalem Radius t und vertikalem Radius 1. Wie in der folgenden Skizze dargestellt bezeichne B_t die durch E_t und die Gerade $x = 1$ beschränkte Fläche.



Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t) = \operatorname{Vol}(B_t) = \int_{B_t} dx.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Was passiert für $t \in (0, \frac{1}{2}]$? Was passiert für $t \to \infty$? Was vermuten Sie über die Extremwerte von f?

(b) Berechnen Sie die Ableitung von f an der Stelle $t_0 = 2$. Erklären Sie, was Sie tun in vollständigen Sätzen.

(c) Ist die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ von Klasse C^1? Begründen Sie!

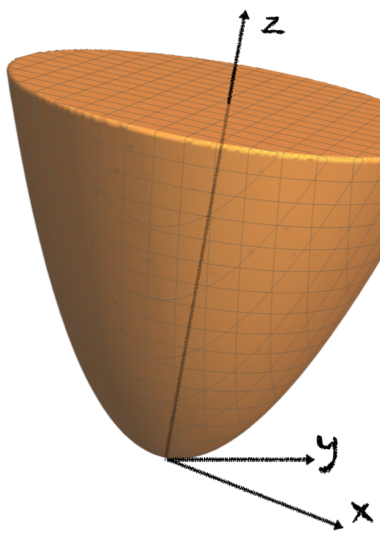
(d) Beweisen Sie: $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$.

Aufgabe 5. (30 Punkte) Es bezeichne $P \subseteq \mathbb{R}^3$ die durch die Gleichung $z = x^2 + y^2$ gegebene Teilmenge (ein sogenanntes *Paraboloid*).

(a) Was besagt der Satz vom konstanten Rang? Zeigen Sie mit Hilfe dieses Satzes, dass P eine Untermannigfaltigkeit ist.

(b) Geben Sie eine Basis des Tangentialraums an P im Punkt $p = (1, 2, 5)$ an. Erklären Sie in vollständigen Sätzen.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ der durch das Paraboloid P und die Ebene $z = 1$ beschränkte Bereich, wie in folgender Skizze.



(c) Berechnen Sie die Aussennormale an B im Punkt $q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{13}{36})$, auf Länge 1 normiert. Erklären Sie in vollständigen Sätzen.

(d) Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = (e^z, e^x, e^x + e^y + az^2 + b\, e^z)$$

das wir als Fliessgeschwindigkeit eines Mediums auffassen, Berechnen Sie den Fluss von F durch die Oberfläche ∂B. Erklären Sie ihre Rechnungen in vollständigen Sätzen.