Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Peter S. Jossen

12. August 2020

Analysis I & II Prüfung - Teil A

CHAB — ITET — MATH — PHYS

Nummer:

Initialen:

Anleitungen für Teil A (120 Minuten)

- Schreiben Sie alle Antworten auf diese Blätter, es werden keine weiteren Blätter eingesammelt! Falls Sie nicht genug Platz haben, nutzen Sie die Rückseite. Bitte lassen Sie diese Blätter zusammengeheftet.
- Sie dürfen Notizpapier verwenden.
- Falls Sie vor 10:15 fertig sind, legen Sie den Prüfungsteil A in das Kuvert zurück, und verlassen stillschweigend den Saal. Nach 10:15 bleiben Sie bitte bis zum Ende des ersten Prüfungsteils an Ihrem Platz.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle
1	[8]		**6**	[8]		**11**	[8]	
2	[8]		**7**	[8]		**12**	[8]	
3	[8]		**8**	[8]		**13**	[8]	
4	[8]		**9**	[8]		**14**	[8]	
5	[8]		**10**	[8]		**15**	[8]	

Gesamtpunktzahl:	[120]

Frage 1.

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heisst *offen*, falls ... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Ist die folgende Menge A offen in $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardmetrik?

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0, xy > 0 \right\}$$

Begründen Sie explizit mit der Definition aus Teilaufgabe (a).

Frage 2. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

(a) Die Funktion f heisst *Lipschitz-stetig*, falls ... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Seien f und g beide Lipschitz-stetig. Ist es wahr, dass $f + g$ Lipschitz-stetig ist? Falls ja, erklären Sie warum. Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

(c) Seien f und g beide Lipschitz-stetig. Ist es wahr, dass $f \cdot g$ Lipschitz-stetig ist? Falls ja, erklären Sie warum. Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

Frage 3. Berechnen Sie die folgenden Integrale. (Nur die Antwort zählt.)

$$A = \int_3^5 \frac{2}{1-x^2}\,dx, \qquad B = \int_0^1 \frac{1}{e^{2x}}\,dx,$$

$$C = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx, \qquad D = \int_{-2}^2 x^2\Big(1+\sin x\Big)\,dx.$$

Frage 4. Existieren die folgenden Grenzwerte? Falls ja, berechnen Sie sie. (Nur die Antwort zählt.)

$$A = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{1 - 2^x}, \qquad B = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x},$$

$$C = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}\,\sin(\log x)}{x}, \qquad D = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 - x)^{\frac{1}{2x}}.$$

Frage 5. Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1^2).$$

(a) Ist f injektiv?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}^2$ ist $Df(x)$ injektiv?

Frage 6. Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

gegebene Teilmenge, und sei $p = (x_0, y_0)$ ein Punkt auf E.

(a) Skizzieren Sie E und beweisen Sie, dass E eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Sie dürfen alle Resultate aus der Vorlesung benutzen.

(b) Geben Sie einen Tangentialvektor an E im Punkt p an (nicht den Nullvektor).

Frage 7. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = e^{xy}$, und das Vektorfeld $F = \operatorname{grad}(f)$. Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ der durch

$$\gamma(t) = (\cos(\pi t^2), t\cos(\pi t))$$

gegebene Pfad von $A = (1, 0)$ nach $B = (-1, -1)$.

(a) Geben Sie das Vektorfeld F explizit an.

(b) Schreiben Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma F dt$ als explizites Riemann-Integral (so explizit, dass Sie es beispielsweise in Wolframalpha eingeben können).

(c) Berechnen Sie das Integral. Erklären Sie dabei Ihre Vorgehensweise!

Frage 8. Sei $f(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(a) Der *Konvergenzradius* R von f ist ... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = 0$.

(c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^{2n+1}$$

Frage 9. Sei $V \subseteq \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum aller Polynome in der Variablen x mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 12. Wir möchten V mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen, die wir durch das Integral

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{-x^2} dx$$

definieren. Sie können davon ausgehen, dass das Integral konvergiert.

(a) Warum erhalten wir damit tatsächlich eine Norm auf V? Erklären Sie was geprüft werden muss, und beweisen Sie anschliessend. Sie dürfen Ihnen bekannte Eigenschaften des Riemann-Integrals ohne weitere Erklärung verwenden.

(b) Ist die Funktion $I : V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $I(f) = f(0)$ stetig bezüglich dieser Norm? Begründen Sie.

Frage 10.

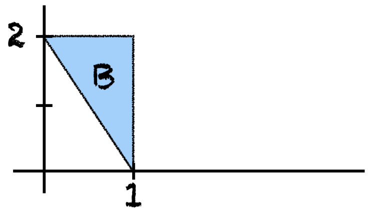
(a) Was besagt der Mittelwertsatz?

(b) Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, nicht beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (0,1)$ existiert mit $|f'(x_0)| > 9000$.

Frage 11. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| < (x^2 + 1)^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Existiert der Grenzwert $\lim_{x \to \infty} f(x)$?

- ☐ Ja, und hier ist der Beweis:
- ☐ Nein, und hier ist das Gegenbeispiel:

Frage 12. Sei B die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ gegeben in folgender Graphik, und sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x, y) = (x^{12} + y^{12}, \cos(xy))$.



(a) Schreiben Sie die Integrale

$$\int_B \operatorname{div}(F)\, dxdy \qquad\qquad \int_{\partial B} F\, dn$$

als explizite Riemann-Integrale (so explizit, dass Sie sie beispielsweise in Wolframalpha eingeben können), ohne sie auszurechnen.

(b) Ist B glatt berandet? Haben die beiden Integrale trotzdem denselben Wert? Warum? Erklären Sie in vollständigen Sätzen.

Frage 13. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x - 1)(y - 3)^2 \cos(x)$$

und seien $v = (1, 0)$ und $w = (1, a)$ Vektoren, wobei $a \in \mathbb{R}$ ein fixer Parameter ist. Berechnen Sie

$$C_1 = D^2 f(0)(v, w) \qquad \text{sowie} \qquad C_2 = D^2 f(0)(w, v)$$

und erklären Sie ihre Rechnung.

Frage 14. Sie werden gebeten die reelle Zahl $\log(2)$ als Dezimalbruch bis auf 6 signifikante Nachkommastellen zu bestimmen (Fehler $< 10^{-7}$). Sie entscheiden dies mit Hilfe der konvergierenden Reihe

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

zu tun. Wie viele Terme der Reihe müssen Sie in etwa aufsummieren, um die gewünschte Präzision zu erreichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Frage 15. Wählen Sie **eines** der folgenden Differentialgleichungsprobleme aus. Geben Sie eine Lösungsmethode für dieses Problem an, und finden Sie alle reellen Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in geschlossener Form, das heisst, alle Integrale sollen ausgerechnet sein! Ignorieren Sie die anderen drei Probleme.

(a) $y'' = -2xy', \quad y(0) = 1,$

(b) $y'(1 + x^2) = xy + x,$

(c) $y'''' = y, \quad y(0) = 1, \quad y$ ist beschränkt.

(d) $y'' = \dfrac{1}{y^2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Ich wähle die folgende Differentialgleichung: $\boxed{}$

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Peter S. Jossen

12. August 2020

Analysis I & II Prüfung - Teil B

CHAB — ITET — MATH — PHYS

Nummer: | **Initialen:**

Anleitungen für Teil B (120 Minuten)

- Lesen Sie alle fünf Aufgaben aufmerksam durch. Entscheiden Sie sich anschliessend für *eine* Aufgabe, die sie *nicht* machen möchten.

Folgende Aufgabe mache ich nicht:

- Lösen Sie die anderen vier Aufgaben auf separaten Blättern. Bitte numerieren Sie Ihre Blätter und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrer Nummer und Ihren Initialen.
- Am Ende der Prüfung legen Sie den Prüfungsteil Teil B mit Ihren Blättern ins Kuvert, bitte in der richtigen Reihenfolge. Es werden keine losen Blätter eingesammelt.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle
	[30]	
	[30]	
	[30]	
	[30]	

Gesamtpunktzahl: [120]

Aufgabe 1. Sie lesen die nachfolgende Textpassage in einem Fachbuch. Erklären Sie dazu die Details. Falls Sie Sätze aus der Vorlesung benutzen, so schreiben Sie jeweils die vollständige Aussage dieser Sätze hin.

Let $a < b$ be real numbers, and let $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ be a continuous function. We extend f to a function $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ by setting $f(x) = 0$ for $x \notin [a,b]$. Let $\epsilon > 0$. The convolution of f with a suitable mollifier yields a smooth function $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ with compact support, for which the estimate

$$(*) \qquad \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x < \epsilon$$

holds.

(a) Was könnte hier genau mit *Mollifier* (*Glättungskern*) gemeint sein? Geben Sie eine Definition an, die in diesem Zusammenhang funktioniert. (Es empfiehlt sich zuerst einmal (c),(d),(e) zu bearbeiten.)

(b) Wie ist die Funktion g definiert?

(c) Warum ist g glatt?

(d) Was ist der Träger einer Funktion, und warum hat g kompakten Träger?

(e) Zeigen Sie, dass für einen geeigneten Glättungskern die Abschätzung $(*)$ gilt.

Aufgabe 2. Wir benutzen für diese Aufgabe die folgende Definition von Kompaktkeit:

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Raum X heisst *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat.

(a) Was ist eine offene Überdeckung von X?

(b) Zeigen Sie direkt mit obiger Definition, dass der metrische Raum $(0, 1]$ nicht kompakt ist.

Betrachten Sie die folgenden Aussagen über den metrischen Raum X:

i) Jede stetige Funktion $X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

ii) Jede stetige Funktion $X \to \mathbb{R}$ nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

iii) Der metrische Raum X ist kompakt.

iv) Jede Folge in X besitzt einen Häufungspunkt.

(c) Beweisen Sie die Äquivalenz i) $\Leftrightarrow$ ii)

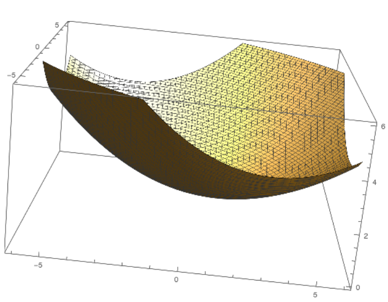
(d) Beweisen Sie die Implikation iii) $\Rightarrow$ i)

(e) Beweisen Sie die Implikation iv) $\Rightarrow$ i)

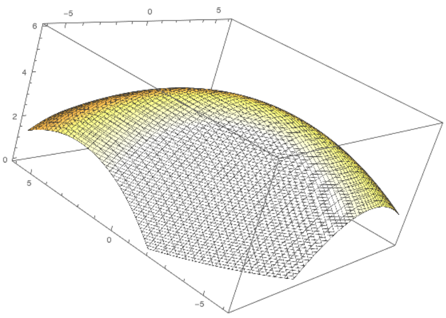
Aufgabe 3. Wir schreiben $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2$, und definieren die Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^3$ durch

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x, y) \leq 10z - 10 \text{ und } Q(x, y) \leq -10z + 50\}$$

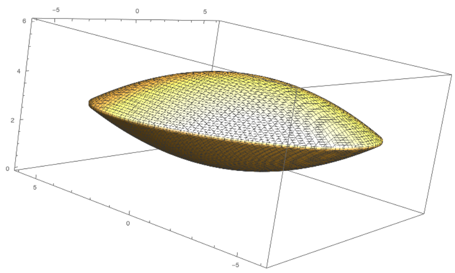
Wir wollen die kürzeste und die längste Distanz zwischen einem Punkt in B und dem Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ berechnen. Als Hilfestellung erstellen wir Computergraphiken der durch $Q(x, y) = 10z - 10$ und $Q(x, y) = -10z + 50$ definierten Parabelflächen, sowie der Menge B selbst.



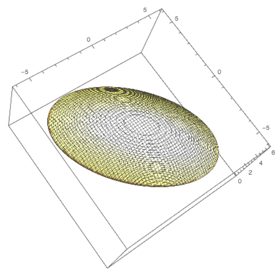
$Q(x, y) = 10z - 10$



$Q(x, y) = -10z + 50$



B von der Seite



B von oben

(a) Begründen Sie, warum überhaupt eine kürzeste und eine längste Distanz zwischen Punkten in B und dem Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ existiert.

(b) Definieren Sie die folgenden Teilmengen von B mit konkreten (Un)gleichungen:

U := Das Innere von B

S := Der obere Teil des Randes von B, ohne den Äquator

T := Der untere Teil des Randes von B, ohne den Äquator

E := Der Äquator

(c) Bestimmen Sie die kürzeste und die längste Distanz mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Bitte benutzen Sie Notation aus (b).

Aufgabe 4. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x, y, z) = (z^2, y^2, x)$$

und sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ das ausgefüllte Dreieck mit Eckpunkten $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ und $C = (0, 0, 1)$, inklusive Rand. Der Satz von Stokes besagt, dass der Fluss von $\operatorname{rot}(F)$ durch S gleich dem Arbeitsintegral von F entlang dem Rand von S ist.

(a) Skizzieren Sie die Fläche S, zusammen mit einem normierten Normalenfeld welches in jedem Punkt negative z-Koordinate hat. Geben Sie in der Skizze auch eine zu diesem Normalenfeld kompatible Orientierung des Randes ∂S an.

Bitte nicht zu klein - brauchen Sie eine halbe A4 Seite. Verlieren Sie keine Zeit mit künstlerischen Details.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung $\psi : U \to S$ von S an, mit einem geeigneten Parameterbereich $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Stellen Sie dabei sicher, dass die Orientierung von S, die Sie durch ψ erhalten, mit der in (a) eingezeichneten Orientierung übereinstimmt.

(c) Berechnen Sie das Flussintegral $\int_S \operatorname{rot}(F)\, dn$ mit Hilfe der gewählten Parametrisierung.

(d) Geben Sie eine richtig orientierte Parametrisierung der Wege an, welche den Rand ∂S beschreiben, und berechnen Sie damit das Arbeitsintegral $\int_{\partial S} F\, dt$.

Aufgabe 5. Sei $p \geq 1$ eine ganze Zahl, und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^{2p} + tx)\, dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass das obige Integral für jedes $t \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass f die folgende Differentialgleichung erfüllt.

$$(\bigstar) \qquad tu = 2p\, u^{(2p-1)}$$

(c) Berechnen Sie die Koeffizienten a_n der Taylor-Entwicklung von f.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

(d) Geben Sie eine Basis von Lösungen von $(\bigstar)$ an. GI sagt Ihnen, dass es sinnvoll ist auch komplexwertige Funktionen als Lösungen in Betracht zu ziehen, insbesondere $t \mapsto f(\lambda t)$ für geeignete $\lambda \in \mathbb{C}$.