Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Peter S. Jossen

22. Januar 2020

Analysis I & II Prüfung - Teil A

CHAB | ITET | MATH | PHYS

Name: ....

Legi-Nr.: ....

Anleitungen für Teil A (150 Minuten)

- Schreiben Sie alle Antworten auf diese Blätter, es werden keine weiteren Blätter eingesammelt! Bitte lassen Sie diese Blätter zusammengeheftet.
- Sie dürfen Notizpapier verwenden.
- Falls Sie vor 11:15 fertig sind, legen Sie den Prüfungsteil A ins Kuvert zurück, und verlassen stillschweigend den Saal. Nach 11:15 bleiben Sie bitte bis zum Ende des ersten Prüfungsteils an Ihrem Platz.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle
1	[10]		**6**	[10]		**11**	[10]	
2	[10]		**7**	[10]		**12**	[10]	
3	[10]		**8**	[10]		**13**	[10]	
4	[10]		**9**	[10]		**14**	[10]	
5	[10]		**10**	[10]		**15**	[10]	

Gesamtpunktzahl:	[150]

Frage 1. [**10 Punkte**] Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

(a) Was besagt der Zwischenwertsatz für Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$?

(b) Was besagt der Mittelwertsatz für Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$?

(c) Was besagt der Mittelwertsatz für Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$?

Frage 2. [**10 Punkte**] Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

(a) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst gleichmässig stetig, falls... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Geben Sie Beispiele stetiger Funktionen $f_1 : (0,1) \to \mathbb{R}$ und $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, die nicht gleichmässig stetig sind oder begründen Sie (in einem Satz oder verweisen Sie auf ein Resultat aus der Vorlesung), warum kein Beispiel existiert.

Frage 3. [**10 Punkte**] Berechnen Sie die folgenden Integrale. *Nur die Antwort zählt.*

$$A = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx, \qquad B = \int_1^2 \frac{1}{2y-1} dy,$$

$$C = \int_{-1}^1 5x^3 \sin(x^2) dx, \qquad D = \int_0^\pi \sin x \cos(\cos x) dx,$$

$$E = \int_0^1 e^{3x+1} dx.$$

Frage 4. [**10 Punkte**] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls Sie existieren. *Nur die Antwort zählt.*

$$A = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{\sin x}}{x}, \qquad B = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{1 - \cos(x^2)},$$

$$C = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^n, \qquad D = \lim_{n \to \infty} \frac{\log(n!)}{n^2},$$

$$E = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x + \sin x}.$$

Frage 5. [**10 Punkte**] Sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = (xy^2 + x, y + x).$$

(a) Berechnen Sie die totale Ableitung von f an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Begründen Sie mit einem Satz aus der Vorlesung, warum f lokal beim Punkt $(2, 3)$ invertierbar ist, dies aber bei $(1, 1)$ nicht gilt.

Frage 6. [10 Punkte] Sei $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Kurve mit Koordinaten $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, welche die Gleichungen

$$x'(t) = \partial_y H(\gamma(t))$$
$$y'(t) = -\partial_x H(\gamma(t))$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass die Funktion $H \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstant ist.

Frage 7. [**10 Punkte**] Geben Sie explizit je ein Beispiel einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ an (welche nicht $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{R}^2$ ist). Falls es keine solche Menge gibt, begründen Sie in einem Satz warum. Definieren Sie die Menge! Nur Zeichnungen zählen nicht. Beachten Sie auch das $A \subseteq \mathbb{R}^2$ nicht $A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) A ist abgeschlossen und nicht beschränkt.

(b) A ist nicht offen und nicht abgeschlossen.

(c) A ist offen und abgeschlossen.

(d) A ist zusammenhängend und nicht kompakt.

(e) A ist zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend.

Frage 8. [**10 Punkte**] Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heisst konvergent, falls... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heisst absolut konvergent, falls... (Ergänzen Sie die Definition)

(c) Konvergiert die folgende Reihe? Konvergiert sie absolut?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Nennen Sie die Konvergenzsätze mit Namen, die Sie verwenden.

Frage 9. [10 Punkte] Betrachten Sie das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und den Pfad $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = \left(ye^x, 2z\sin(x), x^2 + \sin(2z)\right), \qquad \gamma(t) = \left(t^2, 1, t\right).$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma F dt$.

Frage 10. [10 Punkte] Sei $T \subseteq \mathbb{R}^3$ der geometrische Körper, der entsteht, wenn ein Kreis in der xz-Ebene mit Mittelpunkt $(2, 0)$ und Radius 1, um die z-Achse gedreht wird. Dieser Körper wird Torus genannt.

Parametrisieren Sie diesen Körper und geben Sie das Integral an, das dessen Fläche berechnet (den Integrand, so weit es geht, vereinfachen, aber ohne das Integral zu berechnen müssen).

Frage 11. [10 Punkte] Wir wollen den Schwerpunkt eines Achtels der Einheitskugel

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1;\;\; x, y, z \geq 0\right\}$$

bestimmen. Erinnerung: Der Schwerpunkt $S = (S_x, S_y, S_z) \in \mathbb{R}^3$ eines Körpers E ist gegeben durch

$$S_x = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)} \int_E x dx dy dz$$

und analog S_y und S_z. Berechnen Sie aus Symmetriegründen nur S_x und verwenden Sie (ohne Berechnung), dass das Volumen der ganzen Kugel $\frac{4\pi}{3}$ ist.

Frage 12. [10 Punkte] Sie werden von einem Freund (versteht Mathe auf Gymnasialniveau) mit

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = i \cdot i = i^2 = -1$$

konfrontiert. Erklären Sie in 3-4 Sätzen, was die Problematik ist.

Frage 13. [10 Punkte] Wir schreiben die Funktion $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ als Taylor-Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3. *Nur die Antwort zählt.*

Frage 14. [10 Punkte] Für $\alpha > -1$ kennen wir das Integral

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Leiten Sie daraus den Wert für das Integral

$$\int_0^1 \log(x)^2 x^3 dx$$

her. (Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung nach α, begründen Sie ihre Schritte).

Frage 15. [10 Punkte]

(a) Was besagt der Satz von Green?

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Einheitsballes $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$ mit Hilfe des Satzes von Green und dem Vektorfeld $F(x, y) = (-y, x)$.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Peter S. Jossen

22. Januar 2020

Analysis I & II Prüfung - Teil B

CHAB | ITET | MATH | PHYS

Name: ....

Legi-Nr.: ....

Anleitungen für Teil B (90 Minuten)

- Lesen Sie alle vier Aufgaben aufmerksam durch. Entscheiden Sie sich anschliessend für *eine* Aufgabe, die sie *nicht* machen möchten.

Folgende Aufgabe mache ich nicht: $\boxed{}$

- Lösen Sie die anderen vier Aufgaben auf separaten Blättern. Bitte numerieren Sie Ihre Blätter und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Am Ende der Prüfung werden Ihre Blätter zusammengeheftet. Bitte achten Sie auf die richtige Reihenfolge. Legen Sie anschliessend Teil B ins Kuvert, und geben Sie das Kuvert ab.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle
	[30]	
	[30]	
	[30]	

Gesamtpunktzahl:	[90]

Aufgabe 1. [30 Punkte]

(a) Definieren Sie, was eine Cauchy-Folge in einem metrischen Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass Cauchy-Folgen beschränkt sind.

(c) Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig und $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge im metrischen Raum $(0,1)$. Zeigen Sie, dass $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ dann eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Aussage aus (c) nicht stimmt, falls wir nur annehmen, dass f stetig ist.

(e) Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge ist (und darum konvergiert).

Aufgabe 2. [30 Punkte]

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *stetig*, falls ... (Geben Sie die topologische Definition und die Definition durch Grenzwerte an. Also keine ϵ-δ Definition.)

(b) Der Abschluss $\overline{B} \subseteq \mathbb{R}$ einer Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ ist definiert als ... (Es gibt verschiedene äquivalente Definitionen. Für Teilaufgabe c) ist die Definition durch Grenzwerte am besten geegnet. Sie dürfen aber auch eine andere Definition benutzen.)

(c) Zeigen Sie: Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$ für alle $B \subseteq \mathbb{R}$.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *offen*, falls das Bild $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}$ auch offen ist.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *abgeschlossen*, falls das Bild $f(C) \subseteq \mathbb{R}$ für alle abgeschlossenen Mengen $C \subseteq \mathbb{R}$ auch abgeschlossen ist.

(d) Zeigen Sie: Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\overline{f(B)} \subseteq f(\overline{B})$ für alle Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}$ gilt.

(e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion, so dass das Bild $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass f abgeschlossen ist, falls f offen ist.

(f) Geben Sie (ohne Beweis) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche abgeschlossen aber nicht offen ist.

(g) Geben Sie (ohne Beweis) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche offen aber nicht abgeschlossen ist.

(h) Geben Sie (ohne Beweis) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 3. [30 Punkte] Sei $a > 0$ ein reeller Parameter und sei E^a die Menge gegeben durch

$$E^a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{\frac{2}{a}} + |y|^{\frac{2}{a}} \leq 1\}.$$

(a) Zeichnen Sie E^1 und E^2.

(b) Wie sieht die Menge E^a im Grenzwert $a \to 0$ beziehungsweise für $a \to \infty$ aus?

(c) Parametrisieren Sie den Rand von E^a durch eine Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von a. (Tipp: Betrachten Sie zuerst den Fall $a = 1$ und verallgemeineren Sie dann)

(d) Geben Sie die Definition der Länge einer Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

Sei $f : (0,\infty) \to [0,\infty)$ die Funktion $a \mapsto \text{Umfang}(E^a)$, welche den Umfang von E^a beschreibt.

(e) Geben Sie die Funktion f explizit an, (Integrale müssen Sie nicht ausrechnen, vereinfachen Sie den Integrand aber so weit wie möglich).

(f) Begründen Sie kurz: Ist f stetig, differenzierbar?

(g) Beschreiben Sie die Extrema von f und das Verhalten von $f(a)$ für $a \to 0$ beziehungsweise $a \to \infty$ anhand von geometrischen Überlegungen, nicht anhand von direkten Rechnungen.

(h) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 4. [30 Punkte] Es bezeichne $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ die Menge aller 2 Mal 2 Matrizen mit reellen Koeffizienten. Indem wir Matrizen als 4 Mal 1 Spaltenvektoren schreiben, können wir $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^4$ identifizieren. Also

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Sei $F : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ die Funktion gegeben durch

$$F(A) = AA^T,$$

wobei A^T die transponierte Matrix von A ist.

(a) Mit der Identifikation von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^4$ schreiben Sie die Abbildung in Koordinaten hin und begründen Sie, warum F eine glatte Funktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Bild von F im Vektorraum der symmetrischen Matrizen liegt.

(c) Berechnen Sie die Jacobi Matrix von F am Punkt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Lösung ist eine Matrix in $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$.

Wir definieren die Menge der orthogonalen Matrizen $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ als

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : F(A) = Id\},$$

wobei $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ die Identitätsmatrix bezeichnet.

(d) Zeigen Sie, dass der Rang der Jacobimatrix an Punkten $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ gleich 3 ist.

(e) Was besagt der Satz vom konstanten Rang allgemein?

(f) Schliessen Sie mit Hilfe des Satzes vom konstanten Rang, dass $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ ist. Von welcher Dimension ist sie?

(g) Wie können Sie den Tangentialraum am Punkt $Id = \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ aus der Jacobi Matrix von Aufgabe (c) bestimmen? Geben Sie eine Basis an.