Serie 1

Aufgabe 1

Finde eine Figur mit genau drei Symmetrien.

Aufgabe 2

(a) Betrachten Sie das gleichschenklige Dreieck Δ mit den Eckpunkten $A = (-1,-1)$, $B = (1,-1)$ und $C = (0,1)$ in $\mathbb{R}^2$. Es bezeichne

$$s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (-x,y)$$

die Spiegelung an der y-Achse. Ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{cases} s(x) & x \in \Delta \\ x & x \notin \Delta \end{cases}$$

eine Symmetrie von Δ gemäß der Definition?

(b) Betrachten Sie das Dreieck Δ aus (a) als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, d.h. $A = (-1,-1,0)$, $B = (1,-1,0)$ und $C = (0,1,0)$. Wie viele Symmetrien hat Δ in $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3

(a) Bestimmen Sie alle Spiegelungsebenen des Würfels.

(b) Wie viele "Typen" von Spiegelungsebenen hat der Würfel?

($\star$)(c) Die Figur

$$[-1,1]^4 := \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon\ -1 \leq x_i \leq 1 \text{ für alle } i \in \{1,2,3,4\}\right\}$$

ist ein vier-dimensionaler Würfel. Wie viele Spiegelungshyperebenen kannst du finden?

Aufgabe 4

Sei P_n ein reguläres n-gon in der Ebene. Sei R die Rotation um den Mittelpunkt von P_n mit dem Winkel $2\pi/2n$.

(a) Gehört die Punktspiegelung am Mittelpunkt von P_n zu $\mathrm{Sym}(P_n)$?

(b) Haben P_n und $R(P_n)$ die gleichen Symmetrien?

(c) Gegeben sei eine Spiegelung an einer Spiegelachse durch den Mittelpunkt von P_n, die sowohl eine Symmetrie von P_n als auch von $R(P_n)$ ist. Ist sie vom gleichen "Typ" bezüglich P_n und $R(P_n)$?