

## Serie 3

### Aufgabe 1

Seien  $\varphi$  und  $\psi$  Isometrien des  $\mathbb{R}^n$ . Beweise oder widerlege.

- (a) Falls  $p$  ein Fixpunkt von  $\varphi$  und  $\psi$  ist, so ist  $p$  auch ein Fixpunkt von  $\psi \circ \varphi$ .
- (b) Falls  $p$  ein Fixpunkt von  $\psi \circ \varphi$  ist, so ist  $p$  auch ein Fixpunkt von  $\varphi$  und von  $\psi$ .
- (c) Falls  $p$  ein Fixpunkt von  $\varphi$  ist, so ist  $p$  auch ein Fixpunkt von  $\varphi^{-1}$ .
- (d)  $\text{Fix}(\psi \circ \varphi)$  und  $\text{Fix}(\varphi \circ \psi)$  sind isometrisch (das heisst, es gibt eine bijektive Isometrie  $\text{Fix}(\psi \circ \varphi) \rightarrow \text{Fix}(\varphi \circ \psi)$ ).
- (e) Falls  $\varphi^2 = \text{id}$  gilt, so hat  $\varphi$  einen Fixpunkt.
- (f) Falls  $\varphi$  einen Fixpunkt hat, so existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $\varphi^n = \text{id}$ .

### Aufgabe 2

Welche Hintereinanderschaltungen von nicht-trivialen Isometrien im  $\mathbb{R}^3$  sind möglich? Mit Begründung.

- (a) (Drehspiegelung)<sup>4</sup> = Drehung.
- (b) (Drehung)<sup>7</sup> = Geradenspiegelung.
- (c) Drehung  $\circ$  Translation = Drehung.
- (d) Translation  $\circ$  Drehung = Translation.
- (e) Drehung  $\circ$  Translation = Drehspiegelung.
- (f) Drehspiegelung  $\circ$  Gleitspiegelung = Schraubung.

### Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Inversionen in  $\mathbb{R}^2$  eine Translation ist.

### Aufgabe 4

Sei  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Figur mit endlicher Symmetriemenge  $\text{Sym}(F)$ . Zeige, dass entweder keine oder genau die Hälfte der Elemente von  $\text{Sym}(F)$  orientierungsumkehrend sind.

### Aufgabe 5

Wieviel reelle Zahlen (Freiheitsgrade) braucht es, um eine Gerade im Raum  $\mathbb{R}^3$  vollständig zu bestimmen?